الحصاد

مجلة أكاديميّة محكّمة تصدر عن المعهد الأكاديمي
العربي للتربية الكليّة الأكاديميّة بيت بيرل

رئيس التحرير
د. علي وتد

العدد 9 | 2019

המכללה האקדמית בית ברל
الكلية الأكاديميّة بيت بيرل
Beit Berl College

הפקולטה לחינוך
המכון האקדמי הערבי לחינוך
المعهد الأكاديمي العربي للتربية

الحصاد
مجلة أكاديميّة محكّمة تصدر عن
المعهد الأكاديمي العربي للتربية
الكليّة الأكاديميّة بيت بيرل
العدد 9 | 2019

رئيس التحرير: **د. علي وتد**

אלחצאד (=הקציר)
כרך 9, תשע"ט

עורך: ד"ר עלי ותד
כתב־עת אקדמי שפיט היוצא לאור מטעם
המכון האקדמי הערבי לחינוך
המכללה האקדמית בית ברל

Al-Hasad (*The Harvest*)
Editor: *Dr.* **Ali Watad**
Issue 9 , 2019

The Arab Academic Institute for Education
The Academic College Beit Berl
WWW. Beitberl.ac.il

Issn: 2305-0179

تدقيق لغوي:
د. مراد موسى (العربية)
السيدة راحيل لپ-هار (العبرية)
ميخائيل چوچنهييمر (الإنجليزية)

עריכה לשונית:

ד"ר מוראד מוסא (ערבית)
גב' רחל לב־הר (עברית)
מיכאל גוגנהיימר (אנגלית)

تصميم وانتاج: «**مجد**» للتصميم والفنون، حيفا
עיצוב והפקה: **"מג'ד"** אמנות ועיצוב, חיפה

המכללה האקדמית בית ברל
الكلية الأكاديميّة بيت بيرل
Beit Berl College

הפקולטה לחינוך
המכון האקדמי הערבי לחינוך
المعهد الأكاديمي العربي للتربية

الحصاد

مجلة أكاديميّة محكّمة تصدر عن المعهد الأكاديمي
العربي للتربية الكليّة الأكاديميّة بيت بيرل

المحتويات | תוכן עניינים

مراجعة كتب – סקירת ספרים

احسان حاج يحيى

جوانب نظريّة وبيداغوجية لعمليات بناء البراهين وتقييمها[1]

ملخّص

هناك العديد من الدراسات التي تتناول بناء المصطلحات الهندسية، والعلاقة المتبادلة بين تعريف المصطلح الهندسي وصورته الذهنية لدى المتعلِّم. دراسات أخرى تناولت صعوبات بناء البراهين، فهم البرهانين ومعناها، وكذلك فهم الحاجة منها. ومن الملفت للانتباه أنّه بالكاد توجد دراسات تفحص الارتباطات الممكنة بين حقلي البحث أعلاه: بين عمليات بناء المصطلحات الهندسية وعمليات البرهان المرتبطة بها لدى الطلاب. النظرية المتعلقة بالإدراك الهندسي للمتعلِّمين التي وضعها الزوجان فان هيلي والتي تحتوي على خمسة مراحل، فإنّ هذه النظرية أيضا لا تتعامل مع مثل هذه الروابط. فرغم أنّ هذه النظرية تدّعي وجود التراتبية بين مستويات الإدراك الهندسيّة وأنّه من غير الممكن الانتقال من مستوى إدراكي إلى مستوى أعلى منه دون التمكّن والوصول إلى مستوى معيّن من المعرفة، إلّا أنّها لا تتعامل مع آليات التحوّلات من مستوى إدراكي إلى مستوى آخر، فهي تتعامل فقط مع المستويات نفسها.

الهدف من الدراسة الحالية هو محاولة استكشاف بعض الروابط المحتملة بين مجالات البحث هذه. وهذا يعني: دراسة تأثير بناء المصطلحات الهندسية على عملية البرهنة لدى الطلاب، واستكشاف

1. هذا المقال يعتمد على جزء من بحث لرسالة الدكتوراه بعنوان: ربط العوامل البصرية، بناء المصطلحات الهندسية وتعريفاتها وعملية البرهنة. وقد تمَّ نشر جزء من نتائج هذا البحث في كتاب لأحد المؤتمرات الدولية لسيكولوجية تعليم الرياضيات (Haj-Yahya, Hershkowitz & Dreyfus, 2016). هذا المقال فيه توسيع للأدبيّات البحثيّة، وتفصيل وإسهاب أكثر للنتائج والنقاش.

ما هي العوامل البصرية المتعلقة بالصعوبات في إنشاء المصطلحات الهندسية وفهمها، وإلى أيّ مدى تؤثّر على فهم الطلاب للبراهين، وتقييمها وقدرتهم على بنائها.

تشير النتائج إلى تأثير ثلاثة عوامل بصرية على القدرة على بناء البراهين والقدرة على تقييمها: أ) استخدام الميزات الخاصة بالرسم المرافق بدلا من استخدام الميزات الضرورية والأساسية للمصطلح، وهذه الظاهرة أدت عادة إلى افتراض افتراضات خاطئة ومن ثم إلى بلورة براهين غير صحيحة. ب) الفشل و/أو عدم القدرة على بناء مثال غير نموذجي لمصطلح، على سبيل المثال: ارتفاع خارجي للشكل الرباعي أو المثلث، أو أشكال متساوية المساحة ولكنها غير متطابقة، سببت هذه الظاهرة إلى عدم القدرة لبدء عملية البرهنة. ج) عدم القدرة على تمييز العناصر المشتركة لعدد من الأشكال الهندسية نحو: ارتفاع المشترك لمثلثين. وهذه الظاهرة قد حدّت من البدء بعمليه البرهنة أو دفعت بالطلاب إلى وضع افتراضات غير صحيحة.

المقدِّمة

بنظرة سريعة على تعليم موضوع الهندسة، لدي انطباع بأنّ تعليم الهندسة في المدارس الابتدائية والإعدادية تنقصه بعض الأشياء: ليس هنالك تدقيق وترسيخ لبناء المصطلحات الهندسية المختلفة. لم ألحظ تسليطا للضوء على مهامّ يطلب فيها من المتعلمين تمييز وبناء أمثلة بالاعتماد على التعريف للمصطلح الهندسي. أثناء تعليمي للقب الثاني قرأت مقالات والتي أشارت إلى الصعوبات البصرية، الصعوبات في التعريفات التي تؤثر على اكتساب وبناء المصطلحات الهندسية. استنتجت بأنّه هنالك حاجة ملحّة لأن أبحث وأفحص إذا ما كانت هذه الصعوبات البصرية التي تؤثر على بناء المصطلحات الهندسية تؤثر أيضا على عمليات بناء الإثباتات والبراهين لدى الطلاب.

من الشائع الاعتقاد بأنّ خاصية الهندسة لها جانبان: الجانب الأول هو الهندسة كهيكل منطقي الّذي يقوم على وجود العلاقات المنطقية بين الأشكال الهندسية. الجانب الثاني هو الجانب البصري أي الهندسة كعِلم معبِّر عن الفضاء الّذي يخص هذه الأشكال الموجودة فيه. يُشار إلى أنّ هذين الجانبين يرتبط الواحد بالآخر، كما ذكرَ فرويدنتال (Freudenthal, 1973):

Geometry can only be meaningful if it exploits the relation of geometry to the experienced space. *(Freudenthal, 1973, p. 407)*

في المدرسة الابتدائية في البلاد وأيضا في أماكن أخرى في العالم، يتمّ تعليم موضوع الهندسة كسلسلة معلومات مرتبطة بالجانب «الهندسة كعِلم عن الفضاء». لكن ليس هنالك تركيز على العلاقة الوثيقة بين الجانبين المذكورَين أعلاه أثناء تعليم موضوع الهندسة. فالتركيز على هذين الجانبَين والموافقة بينهما عند بناء المصطلحات الهندسيّة مطلب هامّ بسبب الطبيعة التصويرية للأشكال الهندسية. السؤال المطروح: هل هذان الجانبان مهمّان أيضا في عمليات الإثبات؟ وفي أيّة صورة؟

إنّ تعليم بناء الإثباتات والبراهين عادة يرافقه الكثير من الصعوبات والإخفاقات في البلاد وأيضا في الخارج (Balacheff, 1991; Dvora & Dreyfus, 2014; Mariotti, 2006; Senk, 1985). لذا، يتعيّن البحث في مسألة: هل الصعوبات المرتبطة ببناء المصطلحات الهندسية مثل العوامل البصرية تؤثر على قدرة الطالب على بناء البرهان؟ وبأيّة طرق؟

1. الخلفيّة النظريّة

في هذا الفصل سيتم التعرف على مراحل تطور التفكير الهندسي حسب نموذج الزوجين فان هيلي (van Hiele & van Hiele, 1958)، تعريف المصطلح والصورة الذهنية، المثال النموذجي (prototype)، ودراسات عينيّة عن بناء المصطلحات الهندسية.

1.1 نموذج فان هيلي

كان فان هيلي وفان هيلي زوجًا من هولندا، وقد حاولا في سنة 1958 تطوير خمسة مستويات من التفكير الهندسي لدى الطلاب. مستويات فان هيلي تصف تسلسل المستويات التي يحرز الطلاب من خلالها التقدم من مستوى إلى آخر بالاعتماد على التعليم وليس على العمر، حيث أنّ العمر ليس عاملا لتحديد أيّ مستوى للطالب، فالمتعلم لا ينتقل من مستوى إلى آخر دون أن يكون قد تخطّى المستوى السابق (Usiskin, 1982). هذه المستويات تفسِّر عملية تشكيل البراهين بدءا من الفهم الهندسي الأساسي إلى الأكثر تعقيدًا. المستويات الخمسة هي: مستوى التصوُّر (Visualization)، في هذه المرحلة الأولية، يدرك الطلاب الأشكال فقط كشيء موجود من حولهم. ويُنظر إلى المصطلحات الهندسية ككيان كامل بدلًا من كونها تحتوي على صفات أو ميزات، حيث يتم التعرف عليها من خلال شكلها ككل بمظهرها العامّ،

وليس من خلال صفاتها أو مميزاتها. مستوى التحليل(Analysis)، في هذا المستوى يبدأ المتعلم بتحليل المصطلحات الهندسية حسب صفاتها. بحيث يمكن للمتعلم أن يميز صفات الأشكال ولكنه لا يستطيع الربط بين صفات الأشكال ولا يستطيع أن يفهم أنّ صفة معيّنة تتبع من صفة أخرى. مستوى الترتيب (Ordering)، في هذا المستوى يمكن للطلاب تحديد العلاقات المتداخلة بين الخصائص للشكل نفسه وبين صفات الأشكال الأخرى المختلفة. يفهم الطالب في هذه المرحلة أهمية التعريفات الدقيقة، ويفهم كيف بإمكاننا التوصُّل إلى الخروج بصفة من صفة أخرى، ويفهم علاقات الاحتواء بين مجموعات أشكال مختلفة. يمكن للطالب تتبع البراهين لكنّه لا يفهم أهمية الاستنتاج ككل أو إدراك دَوْر البديهيات. مستوى الاستنتاج المنطقي (Deduction)، في هذا المستوى يمكن للطلاب بناء البراهين وفهم كيفية استخدام الاستدلال المنطقي جنبا إلى جنب مع التعريفات الهندسية. يمكن للشخص في هذا المستوى بناء البراهين، وليس مجرّد حفظها. وكذلك إمكانية تطوير البرهان بأكثر من طريقة واحدة، والتجاوب مع الشروط الضرورية والكافية لتعريف المصطلح، والتمييز بين النظرية والنظرية العكسية تكون يكون مفهوما. مستوى الدقة (Rigor)، في هذه المرحلة يحضر الوعي بالهندسة المجردة، بحيث يتم تسليط الضوء على مبناها المنطقي. فيستطيع المتعلم أن يبحث ماذا سيحدث لو تم تغيير مجموعة من البديهيات. أي أنّه يستطيع أن يدرس هندسة ليست بالضرورة أن تكون تقليديّة.

نظريّة الزوجين فان هيلي تبدو متكاملة. والتعريفات والصور الذهنية للمصطلحات الهندسية هي موجودة من ناحية المستوى التعليمي في أول ثلاث مراحل. في هذه المراحل الثلاث توجد صعوبات لدى المتعلمين. وهذا يعزو بنا أن نطرح في البنود التالية هذه الصعوبات بخصوص التعريفات والصور الذهنية للمصطلحات استنادا إلى أهمّ الدراسات العينيّة الّتي تناولت ذلك.

1.2 تعريف «المصطلح» والصورة الذهنية

ركَّز فينر وهيرشكويتز (1980Vinner & Hershkowitz) وتال & فينر (Tall 1981 & Vinner,) على البناء المعرفي للمصطلحات الرياضيّة، واقترحوا نموذجا مكوّنا من مركَّبَين: المركب الأول هو تعريف المصطلح (concept definition)- التعبير اللفظي (الكلاميّ) للمصطلح الرياضيّ ما يتمّ به تمييز المصطلَح. المركَّب الثاني هو الصورة الذهنية للمصطلح (concept image). - الهيكل المعرفي الذي يتضمَّن كل الأمثلة والعمليات الموجودة لإدراك الطالب والمتعلقة بالمصطلح. يتم بناء هذا الهيكل وتغييره خلال فترة الدراسة، أو من خلال التجارب الشخصية للمتعلم، وبالتالي تختلف من

شخص لآخر فيما يتعلق بالمصطلح نفسه. وقد يكون استيعاب المصطلح كاملا أو جزئيا أو غير صحيح. في الواقع، يتم تعلم المصطلح عندما تكون الصورة الذهنية للمصطلح التي يتم تشكيلها مناسبة لتعريف المصطلح (Tall & Vinner, 1981).

1.3 المثال النموذجي (prototype)

بحثت روش وميرفس (Rosch & Mervis, 1975) تكوين فئات المصطلحات في الحياة اليومية، ووجدتا أنّ للفئات في الحياة اليومية توجد أمثلة نموذجية. هذه الأمثلة النموذجية أكثر شيوعًا من باقي الأمثلة في نفس الفئة. تدعي روش (Rosch, 1975) أنّ النماذج الأولية للفئات هي عادة «أمثلة مثالية» التي تكون بمثابة الأساس المرجعيّ لنظام التصنيف إلى فئات، أي أنه يتم الحكم على انتماء أمثلة أخرى للفئة من خلال قربها من النموذج الأولي أو نماذج من الفئة.

بالنسبة للتفكير الهندسي، هناك ظاهرة مشابهة، فقد وجدت هيركوفيتش (Hershkowitz, 1990) أنّ لكل مصطلح هندسي مثالا نموذجيّا بدئيّا (prototype) واحدا أو أكثر. على سبيل المثال: يمثّل المربع مثالاً نموذجيًا لمجموعة الأشكال الرباعية. لذا يتم اكتساب هذه الأمثلة أوّلا، وبالتالي تكون موجودة في الصورة الذهنية للمصطلح عند معظم الأشخاص. الأمثلة النموذجية عادة ما تكون عبارة عن مجموعة فرعية من الأمثلة للمصطلح مع أطول «قائمة» من السمات: جميع السمات الضرورية للمصطلح والميزات الخاصة لهذه المجموعة الفرعية من الأمثلة والتي لا تعتبر ضرورية لجميع الأمثلة للمصطلح. الميزات الخاصة بالمثال النموذجي عادة ما يكون لها خصائص بصرية قوية؛ ممّا يؤثر على مفهوم المصطلح عند الطلاب، لذلك، عندما نتحدث عن الصعوبات والعناصر البصرية التي تؤثّر على بناء المصطلحات الهندسية، فعدة مرات نقصد تأثير ظاهرة النموذج الأولي وخصائصه.

يدّعي فينر وهرشكوفيتس (Vinner & Hershkowitz, 1983):

> *Also, verbal definitions are not necessarily restored as they are, namely, as sequence of words. Very often they are represented by pictorial prototype and only this pictorial prototype is restored in the memory. (Vinner & Hershkowitz, 1983, p. 21-22).*

أي أنّه بشكل خاطئ تلعب الأمثلة النموذجية دَوْر التعريفات عندما تستعمل كمعيار لتصنيف لأمثله والأمثلة المضادة للمصطلح (Hershkowitz, 1990). فوجيتا (Fujita, 2012) الّذي أسّس بحثه على بحث سابق له ولجونس (Fujita & Jones, 2007)،

أثبت أنّه أكثر من نصف المتعلمين بمستويات عالية اعتادوا على تمييز الأشكال الرباعية حسب الأمثلة النموذجية بالرغم من إلمامهم بالتعريفات الدقيقة، الأمر الّذي أدى إلى صعوبات في فهم علاقات الاحتواء بين مجموعات الأشكال الرباعية المختلفة.

1.4 العلاقة المتبادلة بين التعاريف والمصطلحات الهندسيّة

يوجد لكل طالب عدة أمثلة مختلفة يعرفها عن المصطلح، وهي التي يستطيع تشخيصها أو أن يبنيها (Vinner & Hershkowitz, 1980). وقد أشار الباحثان واطسون وميسون (Watson & Mason, 2002) إلى أنّه فقط عن طريق الأمثلة يكون معنى للتعريفات الرياضية. كما ويشير فينر ودرايفوس (Vinner & Dreyfus, 1989) إلى أنّه لا يتم اكتساب مفهوم معين بخطوة واحدة، فهناك عدة مراحل تسبق الاستحواذ والسيطرة الكاملة على مفهوم معقَّد.

تدعي بيلس ورفاقها (Bills, Dreyfus, Mason, Tsamir, Watson & Zaslavsky, 2006) أنّه لفضاء الأمثلة المتعلقة بمصطلح معيّن هنالك مبنى داخلي الّذي تكون فيه جميع العناصر مرتبط الواحد بالآخر. وقد أثبتت أبحاث عدة في مجال الهندسة أنّه من الصعب أن يتقبّل الأولاد أنّ المربع هو مستطيل، وأنّ المعيّن هو متوازي أضلاع، بالرغم من أنّهم يعرفون صفات هذه الأشكال (Fujita & Jones, 2007; Hershkowitz, 1990; Okazaki & Fujita, 2007; Pickreign 2007).

في بحث أجرته هيرشكوفيتش (הרשקוביץ, 1989)، اشترك طلاب من الصفوف الخامسة والسادسة والسابعة والثامنة، حيث قامت بتمرير استمارة طلبت فيها من الطلاب أن يشخّصوا او يبنوا أمثلة لمصطلحات هندسية أساسية، مثل: زوايا، مثلثات، أشكال رباعية ومضلعات. وتم تقسيم الاستمارة إلى قسمين: الأوّل شملَ إيراد تعريف كلامي للمصطلح، وبعدها طلب من الطلاب تشخيص أو بناء مثال للمصطلح، وفي القسم الثاني لم يكن هناك تعريف كلامي للمصطلح، وطلب من الطلاب تشخيص أو بناء المصطلح، بالإضافة إلى أنّه تم إعطاء تعريف لمفهومين مختلقين لم يصادفهما الطالب من قبل، وكان على الطلاب تشخيص الأمثلة التي تمثل هذه المصطلحات من بين مجموعة لأشكال هندسية، أو بناء مثالين مختلفين. يظهر من النتائج أنّ التعريف الكلامي للمصطلح كان مفيدًا في بناء وتشخيص أمثلة بالنسبة للمصطلحات المختلقة، والتي لم يصادفها الطالب سابقًا؛ أمّا بالنسبة للمصطلحات التي كان يعرفها الطالب من قبل فإنّ التعريف الكلامي لم يحسّن من قدرته على التشخيص أو البناء، وتم الحكم على الأشكال حسب النموذج البدئيّ

(prototype) أي حسب شكله. من المهم الإشارة إلى أنّ المصطلحات المختلقة والتي بناها الطلاب حسب تعريفها، قد بُنيت بشكل نموذجي، أي كان هناك أمثلة شائعة شخصت وبنيت عن طريقهم، حيث كان لها صفات مرئية خاصة، بالإضافة إلى صفات أساسية ترتّبت على التعريف المعطى للمصطلح.

أوكازاكي وفوجيتا (Okazaki & Fujita, 2007) قدّما معطيات عن طلاب من الصف التاسع في اليابان وطلاب من كليات إعداد معلمين في أسكوتلندا. لقد أعطيت للمجمعتين نفس استمارة البحث. اليابانيون والأسكتلنديون تصرفوا بنفس الشكل عند تمييز متوازيات الأضلاع من مجموعة أشكال: 74% لم يميزوا المعيّن كمتوازي أضلاع، بالرغم من أنّ العديد من الأفراد في مجموعتي البحث لم يميزوا المربع كمعيّن أو كمستطيل. لليابانيين كانت صعوبة أكبر لتمييز المربع كمستطيل، وفي المقابل للأسكتلنديين المشكلة الأساسية كانت تمييز المربع كمعيّن. هذه الأبحاث تؤكِّد أنّ الصورة الذهنية للمصطلح الهندسي تكون غالبا جزئيّة عندما يفشل كثير من الطلاب في تمييز جميع أمثله المصطلح.

البراهين الهندسيّة

البرهان الرياضي هو عنصر أساسي ومهم جدًا في الرياضيات، وهو أحد الأسس التي تميز الرياضيات عن غيره من التخصصات (Fischbein, 1994; Hersh, 2009; Jones, 1997). إنّ عملية برهنة صفات شكل هندسي هي جزء مهم في منهاج التعليم للهندسة؛ وذلك بسبب كون البرهان أداة لإيجاد معلومات عن المستوى وعن الشكل الموجود فيه، لذلك فهو يعتبر أداة مهمة لبناء تفسير أو هيكل منطقي (Hershkowitz, Parzysz & van Dormolen, 1996).

الباحثة سنك (Senk, 1985) أجرت بحثا في الولايات المتحدة الأمريكية لطلاب اجتازوا دورة لمدة سنة كاملة في الهندسة المستوية في الصف العاشر، وقد تأسست هذه الدورة على البراهين الهندسية، ووجدت أنّه فقط 30% استطاعوا برهنة 75% ممّا هو مطلوب، والكثير من أولئك الذين استطاعوا البرهان، لم يفهموا معنى البرهان. بعدها بسنوات، ماريوتي (Mariotti, 2006) وجدت أنّ الطلاب في المرحلة الثانوية لديهم صعوبة في بناء البراهين الهندسية وفهم معناها.

الجانب البصري والجانب المنطقي البنائي مرتبطان الواحد بالآخر. لقد اهتم فيشباين (Fischbein, 1993) بالعلاقة بين العنصر المرئي وعملية البرهان في الهندسة، وقد أشار إلى أنّ العنصرين غير مفصولين عن بعضهما، كما واهتم

فيشبن (Fischbein, 1994) بتأثير التناقضات بين الصفات المرئية وبين صفات المصطلح للشكل الهندسي وتأثيرها على التفسير الهندسي. أما بارزس (Parzysz, 1988) فيدعي أنّ الربط ما بين الأشكال الهندسية النظرية يتم بواسطة تمثيل بياني والذي يُدعى «رسم». كما ويقول أنّ هذا الرسم هو وحيد، ويمثّل مجموعة والتي على الأغلب تكون لا نهائية لأشكال لها صفات مشتركة، فالشكل نموذج أو مفهوم هندسي الممثل بنص كتابي يقوم بتعريفه، والذي يكون ممثّلا بمساعدة شكل واحد فقط.

ستانباس وستاينبرغ (Steenpass & Steinbring, 2014) وجدا أنّ بحث الطلاب لتمثيلات مرئية مهم جدا في بناء معرفة هندسية جديدة. ادّعى كلّ من حين وهيربست (Chen & Herbst, 2013) أنّ الطلاب اعتمدوا على الرسومات التوضيحية لكي يبنوا عناصر هندسية جديدة واستنتاج علاقات هندسية جديدة. ولكن الطريقة التي يتم فيها استعمال الرسم، من الممكن أن تؤدي إلى خلق صعوبات لدى الطلاب عند البرهان، فالرياضيون يستعملون الرسم لتمثيل نموذج رياضي نظري؛ وذلك من أجل شرح وتوضيح ادعائهم. لكن في الكثير من الحالات يتعامل الطلاب مع الرسمة الخاصة والوحيدة التي تظهر أمامه على الورقة وكأنها المصطلح نفسه وليس للنموذج المبسّط الذي يمثّله (Laborde, 2005). جال ولينتشبسكي (Gal & Linchevski, 2010) وجدا أنّه من الصعب على الطلاب في الأسئلة المرفقة برسم أن يميّزوا بين الصفات المرئية الّتي تكون على صلة بالمسالة وبين الصفات التي لا تمت بصلة للمسالة.

زاسلبسكي (Zaslavsky, 2014) في محاضرة وصفت حالة في إحدى دروس الهندسة التي تعلموا فيها عن مصطلح المستقيم المتوسط للضلع في المثلث. رسمت المعلمة مثلثا ورسمت فيه مستقيما متوسّطا لأحد الأضلاع، وهذا المستقيم المتوسّط يبدو للعين كأنه منصّف زاوية. في أعقاب ذلك، استنتج بعض الطلاب أنّ المستقيم المتوسّط هو أيضا منصّف للزاوية. هذا التصرف مطابق للتصرفات للطلاب في مهامّ الإثبات التي يستخدم فيها الطلاب المعلومات والصفات غير المعطاة في نص السؤال، واعتمادهم على النظر، من الممكن أن يؤدي إلى وقوع أخطاء في معظم الأحيان. وهذا حاصل بالفعِل إذ في بحث لدبورا ودرايفوس (Dvora & Dreyfus, 2014) الذي اشترك فيه 246 طالبا من الصف العاشر من مدارس مختلفة في إسرائيل وجد أنّه من بين جميع الحلول الخاطئة في بناء براهين وإثباتات، فإنّ 87% منها اعتمد الطلاب على فرضيات غير معطاة في السؤال أثناء إثباتهم. هذه الفرضيات في الغالب سببها اعتماد الطلاب على الرسم التوضيحي المرافق لمهمة الإثبات.

تقول هداس (הדס, 2001) أنّ الرسم الذي يظهر بجانب الادعاء الذي يجب أثباته، هو مثال واحد للشكل الذي نتعامل معه، وهذا الرسم غالبًا يكون نموذجيا، وهذا

يؤدي إلى استعمال الصفات الخاصة بالرسم أثناء عملية بناء البرهان، حيث تكون هذه الصفات ليست هي الصفات الأساسية للمصطلح النظري الممثّل بواسطة الرسم، بل صفات إضافية تكون تابعة للشكل المرسوم. يدعي دوبل (Duval, 1998) وجونس (Jones, 2000) أنّه يجب الحدّ من الهوة بين التصرف الساذج والتصرف الرياضي. على المتعلم أن ينتقل من الفهم المرئي التي فيها يميّز الشكل حسب مرآه إلى التصرف التحليلي الّذي فيه تتم الاستنتاجات حسب صفات الشكل.

كما أسلفنا في الفقرة السابقة وكما هو في البحث الحالي، استعملت في المهامّ رسومات ثابته ليست ديناميكية، وهذه الرسومات هي مثال واحد يمثل المشكلة المعروضة في السؤال. هذه الرسمة الثابتة بإمكانها أن تؤدي إلى تصرف ساذج فيه يعتمد الطلاب في حلّهم على الصفات البصرية الخاصة بهذا المثال الوحيد بدلا من الصفات الضرورية للمصطلحات المعروضة في السؤال الهندسي. مقارنه بذلك، هنالك أبحاث عدّة فحصت تأثير استعمال الرسومات الديناميكية على تفكير وحلول الطلاب. هذه الأبحاث التي بحثت فائدة برامج الهندسة الديناميكية تشدّد وتؤكد على القيود الناتجة عن استعمال رسومات ثابتة عند تعليم وحل الطلاب لمسائل هندسية مختلفة. فمثلا وجدت يروشلمي وحازن (Yerushalmy & Chazan, 1990)، دوبل (Duval, 1998)، ولابورد (Laborde, 1995) أنّ استعمال برامج وتطبيقات الهندسة الديناميكية التي يكون فيها عملية سحب، تسمح للطالب رؤية تسلسل متغير لأمثلة المصطلح التي تحتفظ جميعها بالصفات الضرورية له، تدعم بناء البراهين. في بيئة تعليم للهندسة الديناميكية، تقل الصعوبة النابعة من الصفات الخاصة للشكل، والصعوبة لقلة القدرة على التمييز بين الأمثلة التي ليست نموذجية. الأبحاث التي تم إجراؤها في جامعة حيفا فحصت تأثير استعمال الصفات الهندسية الديناميكية على عمل الطلاب. فمثلا وجدت يروشلمي (Yerushalmy, 1991) في بحثها أنّ عمل الطلاب في المجموعة التجريبية الذين تعلموا بواسطة برنامج خاص يدعى «המשער הגיאומטרי»، مقارنةً بالمجموعة المنضبطة لأولئك الّذين تعلموا نفس المصطلحات الهندسية بطريقة تقليدية، كان أعلى وقد ظهر ذلك بالذات في المصطلحات التي فيها يكون للنموذج الأولي لها تأثير كبير جدا. لقد أبطل استعمال برامج وتطبيقات الهندسة الديناميكية تأثير الصفات الخاصة بالمثال النموذجي الّذي هو ممثّل واحد فقط لجميع أمثله المصطلح الهندسي، مع الملاحظة أنّ يروشلمي اعتمدت على نفس استمارة البحث التي استعملتها هيرشكوفيتس (הרשקוביץ, 1989). تدعي ميمون-إيرز ويروشالمي (Maymon-Erez & Yerushalmy, 2007) أنّ الشرط الأساسي لنجاعة استعمال وسيلة الهندسة الديناميكية هو الفهم أنّ السمات

والصفات الضرورية أثناء بناء التطبيق يجب الحفاظ عليها عند سحب أو جرّ الشكل للحصول على عدد لانهائي من الأمثلة. فيما بعد، وجدت يروشالمي ونفتالييب (Yerushalmy & Naftaliev, 2011) أنّ تعامل الطلاب في المدرسة الثانوية مع الرسومات التوضيحية أثناء عملية الإثبات يتعلق إذا ما كانت الرسومات ثابتة كما في الكتب، أو ديناميكية كما في الوسائل والتطبيقات التكنولوجية.

هنالك العديد من الأبحاث التي أجريت لبحث بناء المصطلحات الهندسية في ذهن المتعلم، ومن جهة أخرى هنالك أبحاث التي فحصت عمليات البرهنة والصعوبات التي تميزها. بالرغم من ذلك، ثمّة نقص في الأبحاث كافية التي توصل بين هذين المجالين. وأيضا يُذكر أنّ نظرية الزوجين فان هيلي تطرقت إلى التفكير الهندسي كسلسلة مستويات منفصلة، ولكنها لم تفسِّر كيفية اتصال مستوى معيّن بالآخر، وهل الصعوبات في مستوى معيّن تؤثِّر على التعلم والتفكير بمستوى أعلى؟ من هنا تنبع الحاجة الملحة للبحث.

1. سؤال البحث

يلتفّ سؤال البحث حول العوامل البصرية المتعلقة ببناء المصطلحات الهندسية، والتي تتضمن ظاهرة استعمال الصفات الخاصة للرسمة الوحيدة، وعدم القدرة على تمييز أو بناء أمثلة غير نموذجية وعدم القدرة على تمييز وقبول كائن مشترك كالارتفاع المشترك- إلى أيّ مدى يؤثِّر ذلك على بناء، وفهم وتقييم الطلاب للإثباتات والبراهين.

2. الطريقة والإجراءات

فيما يلي سأصف مجتمع البحث، سيرورة البحث أدوات البحث وطريقة تحليل النتائج.

مجتمع وعيّنة الدراسة

تضم عيّنة البحث 100 طالب ثانوي تقريبا. جمع النتائج تلاحق منذ كان الطلاب في الصف الحادي عشر. الطلاب تعلموا لدى ثلاثة معلمين مختلفين في ثلاثة صفوف متوازية (مستويات 4 و 5 وحدات في الرياضيات أي الصفوف النّخبة في الشريحة)، في إحدى المدارس العربية الثانوية في مركز البلاد وهي تعتبر ذات مستوى جيّد. عدد لا بأس به من الطلاب هم من البلدات المجاورة.

وصف التعليم داخل الصفوف

في كل صف من الصفوف الثلاثة يوجد 40 طالب. المعلمون حاصلون على اللقب الأول من جامعات البلاد مع أكثر من 12 سنة أقدميّة في العمل. يتعلم الطلاب في هذه الصفوف خمس ساعات أسبوعية من ضمنها ساعتان مكرّستان لتعلّم موضوع الهندسة المستوية حسب برنامج وزارة المعارف. من الجدير ذكره أنّه لم يستعمل المعلمون أثناء تعليمهم وسائل تكنولوجية أو تطبيقات هندسة ديناميكية.

استمارة البحث

في هذا البند الوصف العام للاستمارة. في فصل تحليل النتائج وصف تفصيلي للمهامّ في الاستمارة والنتائج التي حصلنا عليها مع تحليل قبلي لكل مهمة. في قسم من المهامّ طُلب من الطلاب أن يقيموا حل لطالب مجهول. بواسطة هذا التقييم يلتزم الطالب بتفكير ناقد عندما يفحص البرهان المعروض أمامه. عندما يعلِّل الطالب إجابته بإمكانه الكشف عن آرائه، معرفته وتوجهاته تجاه سيرورة البرهان المعروض.

المقابلات

السبب الرئيس لإجراء المقابلات هو إتاحة الفرصة لي لطرح أسئلة لم أطرحها في الاستمارة بعد تبلور حاجة ملحة لها للكشف عن الأسباب الحقيقية وراء إجابات الطلاب. لقد تم اختيار الطلاب لإجراء المقابلة وفقا لإجاباتهم على الاستمارة، وقد اختير طلاب يعبّرون عن أنفسهم بحرية وحسب ما أوصى معلموهم. كانت المقابلات شخصية وشبه ثابته. وبعبارة أخرى، سُئل كل من الأشخاص الذين أجريت معهم المقابلات الأسئلة الثابتة نفسها التي حددت للمقابلة وأسئلة أخرى متعلقة بردود الأشخاص على الأسئلة الثابتة في المقابلة. بعد تحليل الاستبيانات واستنتاجاتها، قمت ببناء الجزء الثابت في المقابلات شبه الثابتة. بعض المهام في الاستمارة جاءت على شكل أسئلة في المقابلة، وذلك باعتبار أنّ هذه الأسئلة قد أخطأ في الإجابة عنها نسبة عالية من الطلاب. لقد اخترت هذه الأسئلة من أجل دراسة الاتجاهات التي تم الكشف عنها في الاستمارة بعمق. بالإضافة إلى ذلك، قمت بطرح أسئلة جديدة كان الغرض منها إضافة المعلومات والفهم إضافة إلى النتائج التي حصلنا عليها بعد تحليل الاستمارة؛ وذلك لبحث بُعْد آخر لم يتم فحصه في الاستبيان نفسه. على سبيل المثال، في الاستبيان وجدت أنّ صعوبة الطلاب في تحديد الارتفاع المشترك حدّت من قدرة الطلاب على عملية إثباتهم. كان الارتفاع المشترك خارجيًّا لأحد المثلثات (مثلث منفرج الزاوية). في المقابلات

اللاحقة، راجعت ما إذا كان بإمكان الطلاب تحديد ارتفاع مشترك عندما يكون داخليًّا للمثلثين.

تم تسجيل المقابلات والانطباعات عنها في محضر توثيقيّ مباشرة بعد كل مقابلة. تم اختيار أجزاء من المقابلات وفقًا لأهميتها بالنسبة لأسئلة البحث، وتم تحليلها. كان الغرض من كل مقابلة هو معرفة وفهم النقاط التي أثيرت في الاستبيان، والتي أشارت إلى أنّ الفهم والتوضيح الإضافي لها مثير للاهتمام.

تحليل النتائج

تم إجراء تحليل الاستمارات باستخدام الأساليب الكمية والنوعية. في البداية، تم ترميز الفئات لإجابات الطلاب عن المهامّ المختلفة في الاستمارة. بالنسبة للمهام التي طُلِب فيها من الطلاب تقديم شرح وشرح لإجاباتهم، فقد قمت بتصنيف إلى فئات من تفسيرات الطلاب لكل سؤال وفقًا لتفسيرات بعض الطلاب، وقد قمت بترميز جميع تفسيرات الطلاب الأخرى حسب هذه الفئات. هذه الفئات من التعليلات والبراهين صنِّفت وفقًا للنظرية المجذرة (Strauss & Corbin, 1994)، وتم إدخال جميع الترميزات للبيانات الخاصة بالاستمارة في برنامج SPSS لكل مهمة. لكل مهمة تتطلب الإثبات أو الشرح أو الاستدلال، تم بناء جدول ثنائي الأبعاد، حيث وُضع في بعد واحد «ادعاء» الطلاب وفي البعد الثاني وُضعت تعليلات الطلاب وبراهينهم المتعلقة بهذه الادعاءات (التي تم تدوينها في وقت سابق). في المهام التي تتطلب تعليلا، تم حساب تكرارات التفسيرات والأدلة الخاصة بكل الطلاب في كل فئة. هذه النتائج العددية كانت أساس التفسيرات المختلفة للنتائج. من أجل تعزيز الاستنتاجات النّابعة من التفسيرات، قُدِّمت أمثلة على إجابات مناسبة للطلاب. بالإضافة إلى ذلك، تم اجراء اختبار كاي تربيع (chi-square test) لفحص إذا كانت هنالك دلالة إحصائية بالنسبة للعلاقة بين الظواهر المتعلقة ببناء المصطلحات الهندسية وعمليه بناء وتقييم البراهين.

3. النتائج

فيما يلي تفصيل للمهامّ: لكل مهمة يظهر تحليل قبلي لها، معطيات إجابات الطلاب وتحليل النتائج بالإضافة إلى أمثلة على إجابات الطلاب المختلفة التي كانت بخط الطلاب أنفسهم.

4.1 نتائج المهمة الأولى

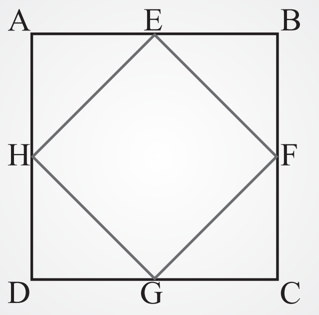
تلقّى الطلاب المهمة التالية:

معطى شكل رباعي ABCD، النقاط E ,F ,G ,H هي منتصفات الأضلاع AB ,BC ,DC ,AD, بالتلاؤم.

على أيّ شكل رباعي نحصل عندما نصل بين منتصفات الأضلاع في الشكل الرباعي المعطى؟ أثبت ادعائك.

رسمَ سليم المعطيات وادّعى: إذا أوصلنا بين منتصفات الأضلاع لشكل رباعي ما، فإنّ الشكل الرباعي الناتج هو مربع.

كتب سليم إثباتا لادعائه:



«النقاط E,F,G,H هي منتصفات الأضلاع، لذا يتحقّق:
AE=EB=BF=CF=CG=DG=HD=AH

فيكون كل المثلثات: Δ AHE, Δ BEF, Δ FCG, Δ HDG هي مثلثات قائمة الزوايا ومتساوية الساقين وكلها متطابقة.

عندها يتحقق: EF=FG=HG=HE أي أنه في الشكل الرباعي: EFGH كل الأضلاع متساوية. بالإضافة إلى ذلك، بما أنّ $\Delta\ AEH = \Delta\ BEF = 45^0$ فإنّه: $HEF = \Delta\ 90^0$

في الشكل الرباعي EFGH كل الأضلاع متساوية ويوجد زاوية واحدة قائمة، لذا فالشكل الناتج هو «مربع». هل ادعاء وإثبات سليم صحيحان؟ عللوا إجاباتكم بشكل مفصّل.

تحليل المهمة الاولى

الهدف من هذه المهمة هو فحص فيما إذا كان الطلاب يقبلون (أو لا يقبلون) ادعاء وإثبات سليم؟ أي هل يقبلون أو يعارضون استعمال واعتماد الصفات الخاصة للرسم التوضيحي المرفق للمهمة (صفات المربع)، علما بأنّ هذه الصفات غير معطاة في المهمة. الجدير ذكره أنّ ادعاء وإثبات سليم غير صحيحين، سليم عرض معطيات السؤال المتعلقة بشكل رباعي كشكل رباعي خاص (مربع). واستعمل سليم الصفات الخاصة بالمربع لحل السؤال.

إجابات الطلاب على المهمة الأولى

حوالي 56% من الطلاب ادّعوا أنّ سليم غير مصيب، أي أنّهم انتبهوا إلى أنّ الرسم النموذجي غير مناسب لمعطيات المهمة؛ ولذا فادعاء وإثبات سليم غير صحيحين. أكثريتهم (76% من بينهم) علّلوا ذلك بأنّ سليم استعمل معطيا غير صحيح. مثلا «لا، حسب المعطيات لم يكن معطى بأنّ الشكل ABCD هو مربع، استنتاج سليم جاء على أساس أنّ الشكل ABCD هو مربع». تقريبا 8% من مجموع الطلاب ادّعوا أنّ سليم غير محقّ ولكنهم كتبوا البرهان الصحيح. مثلا «ادعاء سليم غير صحيح لأنّه غير معطى أنّ الشكل ABCD هو مربع، لذا لا نستطيع أن نفرض أنّ الزوايا قائمة وأن نخلُص إلى النتيجة بأنّ FC = BF = EB = AE . الشكل الرباعي الذي نحصل عليه هو متوازي أضلاع. نمرّر القطر BD ونحصل على المثلث BDC. FG هو قاعدة وسطى في المثلث لذا يتحقّق أنّ FG يوازي BD وطوله يساوي نصف طول BD. في المثلث BDA، HE هو قاعدة وسطى، لذا يوازي وطوله يساوي نصف طول BD، نتيجة لذلك يكون لدينا زوج واحد من الأضلاع المتقابلة متوازية ومتساوية؛ لذا فالشكل الناتج هو متوازي أضلاع». فيما يلي في الجدول 1 تكرارات إجابات الطلاب بالأرقام والنسب.

جدول 7.3: هل ادّعاء وإثبات سليم صحيحان؟

تعليل / ادّعاء	لم يعلّل	وافق وذكرَ أنّ سليم استعمل معطيا غير صحيح	وافق وذكرَ أنّ سليم استعمل معطيا غير صحيح وعرض ما هو صحيح/ كتب برهانا صحيحا	تطرق الى المربع: كتب إثباتا صحيحا للمربع	تطرق الى المربع: كتب إثباتا غير صحيح للمربع	تطرق الى المربع: ادعى أنّ البرهان غير كافٍ (ناقص)	المجموع
لم يجب	3 (3.3%)	**2 (2.1%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	5 (5.4%)
سليم صادق	4 (4.4%)	0 (0%)	0 (0%)	12 (13.2%)	16 (17.6%)	2 (2.1%)	34 (37.4%)
سليم غير صادق	2 (2.1%)	36 (39.6%)	7 (7.7%)	0 (0%)	2 (2.1%)	4 (4.4%)	51 (56%)
سليم صادق جزئيا	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	1 (1.1%)	0 (0%)	1 (1.1%)
المجموع	9 (10%)	38 (41.7%)	7 (7.7%)	12 (13.2%)	19 (20.8%)	6 (6.6%)	91 (100%)

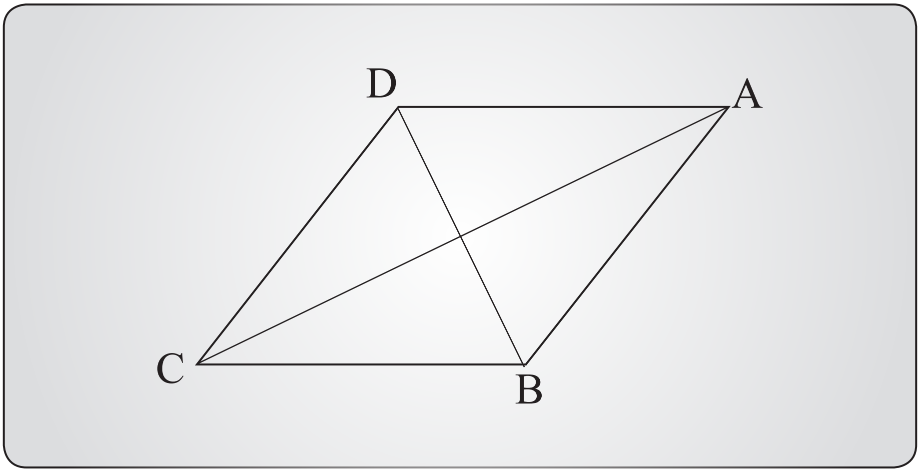
** لم يجيبوا على الادعاء هل سليم صادق أم لا ولكن علّلوا أنّ سليم استعمل معطيا غير صحيح.

لقد تم إجراء اختبار كاي تربيع (chi square(15, N=91)=87.90, p=.000<0.01)، ولقد وجدت دلاله إحصائية بين تقييم البرهان وبين الاعتماد على الصفات الخاصة بالرسم بجانب سؤال الإثبات. حوالي 37% من الطلاب الذين أجابوا عن السؤال «سقطوا في الكمين» وادعوا أنّ سليم صادق. هذا يعني أنّ الطلاب اعتمدوا على الرسم التوضيحي وليس على معطيات السؤال في النص المجاور. وهم يعتبرون أنّ المربع يمثِّل جميع الأشكال الرباعية ويخطئون بالنسبة للإثبات. 12% من بينهم لا يعلّلون ادعائهم أنّ سليم صادق. الآخرون (82%) من بينهم يعتمدون فقط على المربع ويعطون إثباتا للمربع، قسم منهم يعطي إثباتا ملائما للمربع، والقسم الآخر يعطي إثباتا غير ملائم أو منقوص وغير كاف للمربع. مثلا: «ادعاء وإثبات سليم صحيحان؛ لأنّه في المربع كل الأضلاع هي متساوية وبسبب أنّ النقاط E, F, G, H هي

منتصفات أضلاع متساوية؛ لذا يتحصَّل لدينا أربعة مثلثات متساوية الساقين، ونتيجة لذلك يتكوّن لدينا شكل رباعي كل أضلاعه متساوية. فالشكل هو مربع». هذا الطالب كتب تعليلات صحيحة للمربع ولكنها منقوصة وغير كافية: يكتب أنّ المثلثات متساوية الساقين ولكن وفق هذه المثلثات ليس بالضرورة الاستنتاج أنّ $EF = FG = GH = EH$. إضافة إلى ذلك، إذا كان في الشكل الرباعي جميع الأضلاع متساوية، فإنّ ذلك لا يعني بالضرورة ان يكون الشكل مربّعا، ويمكن أن يكون معيّنا.

4.2 نتائج المهمّة الثانية

- معطى المعيّن ABCD فيه طول القطر AC أكبر بمرتين من ارتفاع المعيّن.



أثبِتوا أنّ الزاوية $\angle ACB = 30^0$

تحليل المهمة

لكي نثبت الادّعاء علينا بناء ارتفاع خارجي في المعيّن (من A إلى امتداد BC أو من C إلى امتداد AD)، وعندها من الممكن الإثبات حسب النظرية: إذا كان في مثلث قائم الزاوية الضلع القائم مقابل الزاوية يساوي نصف الوتر، عندها الزاوية المقابلة للضلع القائم تساوي 30 درجة. الجدير ذكره أنّنا نستطيع الإثبات عن طريق بناء ارتفاع داخلي من D إلى الضلع BC داخل المعيّن، غير أنّ الحل يكون طويلاً ومعقدًا أكثر، وبالفعل لم يكُن أيّ طالب قد حل بهذه الطريقة.

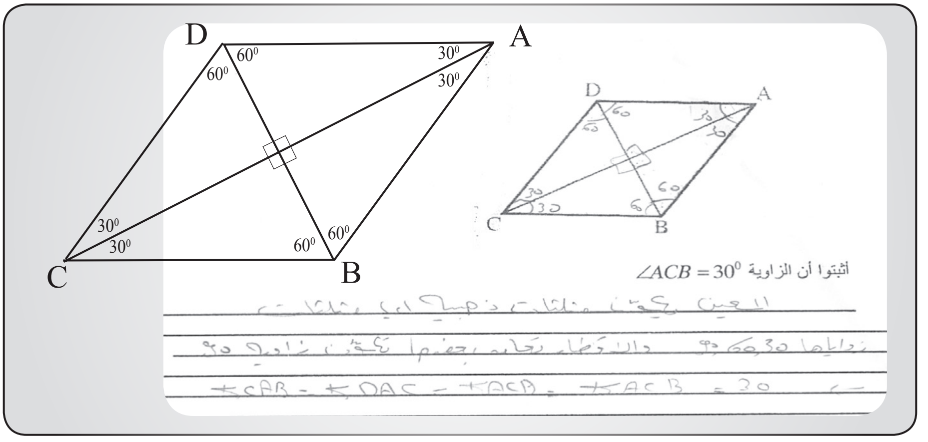
إجابات الطلاب على المهمة الثانية

من النتائج في جدول 2 بإمكاننا الملاحظة أنّه تقريبا ثلث الطلاب (34 طالبا) بنوا ارتفاعا خارجيا في المعيّن من الرأس A، نتيجة لذلك، حصلوا على مثلث قائم الزاوية (ACB) فيه طول أحد أحد القائمة يساوي نصف طول الوتر. غالبيّة الذين بنوا الارتفاع الخارجي (28 طالبا من مجمل 82% من الطلاب الذين بنوا الارتفاع الخارجي) استطاعوا أن يكتبوا إثباتا صحيحا أنّ الزاوية ACB تساوي 30 درجة، ولم يكُن أيّ طالب آخر كتب إثباتا صحيح! أي أنّ الإثبات الصحيح يتعلق بقبول وبناء الارتفاع الخارجي غير النموذجي كمثال لارتفاع في المعيّن.

جدول 2. إثبات أنّ $\angle ACB = 30^0$

إثبات / بناء ارتفاع	لم يُثبت	أثبت بشكل صحيح حسب صفات المثلث القائم الزاوية (0%)	يذكر أنّه تنقصنا معطيات (0%)	اعتمد على فرضيات غير معطاة	إجابته لا تمت بصلة (%0)	المجموع
بنى ارتفاعا خارجيا	1 (1.1%)	28 (30.9%)	2 (2.1%)	3 (3.3%)	0	34 (37.4%)
بنى ارتفاعا داخليا	0	0	0	20 (22%)	3 (3.3%)	23 (25.3%)
لم يبنِ ارتفاعا	9 (10%)	0	0	14 (15.3%)	11 (12%)	34 (37.3%)
المجموع	10 (11.1%)	28 (31%)	2 (2.1%)	36 (40.5%)	14 (15.3%)	91 (100%)

لقد تم إجراء اختبار كاي تربيع ($chi\ square(8, N=91)=94.52, p=.000<0.01$)، ولقد وجدت دلالة إحصائية بناء الارتفاع في الشكل وبين بناء الإثبات. حوالي 37% من الطلاب لم يبنوا ارتفاعا، 41% منهم اعتمدوا على فرضيات غير معطاة وغير صحيحة وأثبتوا بشكل خاطئ، 32% أجابوا إجابة لا تمت بصلة و 27% لم يحاولوا البتة كتابة إثبات. مثلا الطالبة فيما يلي لم تبنِ ارتفاعا واعتمدت على فرضيات عشوائية غير معطاة:

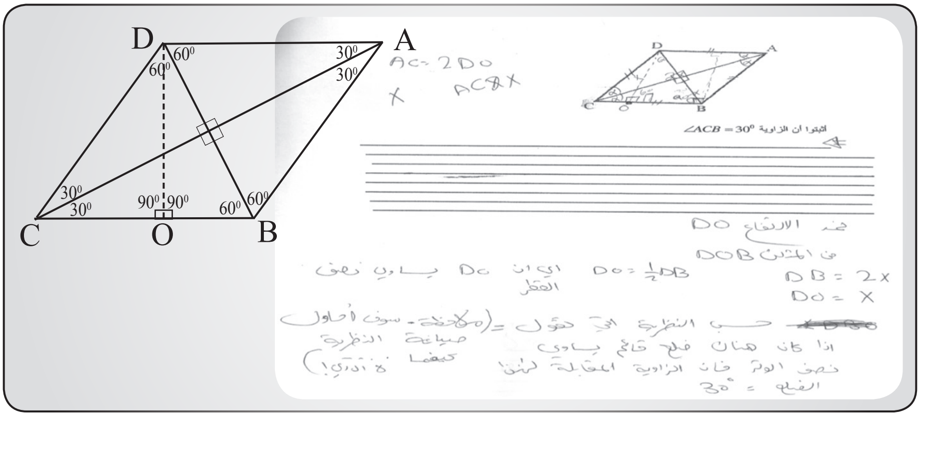


المعين يكوّن مثلثات ذهبية أي مثلثات زواياها 30^0، 60^0 ، 90^0 والأقطارتُعامد بعضها البعض وتكون زاوية 90^0

ادّعت الطالبة أنّ المثلثات الناتجة هي مثلثات ذهبية!

حسب النظرية التي تقول: إذا كان هناك ضلع قائم يساوي نصف الوتر فإن الزاوية المقابلة لهذا الضلع تساوي 30^0.

إضافة إلى ذلك، نلاحظ في الجدول أنّ 25% من الطلاب بنوا ارتفاعا داخليا، ولكن لا أحد منهم كتب إثباتا صحيحا، وغالبيّتهم (تقريبا 83% منهم) اعتمدوا على فرضيات غير صحيحة. مثلا ما ورد لدى الطالبة فيما يلي:



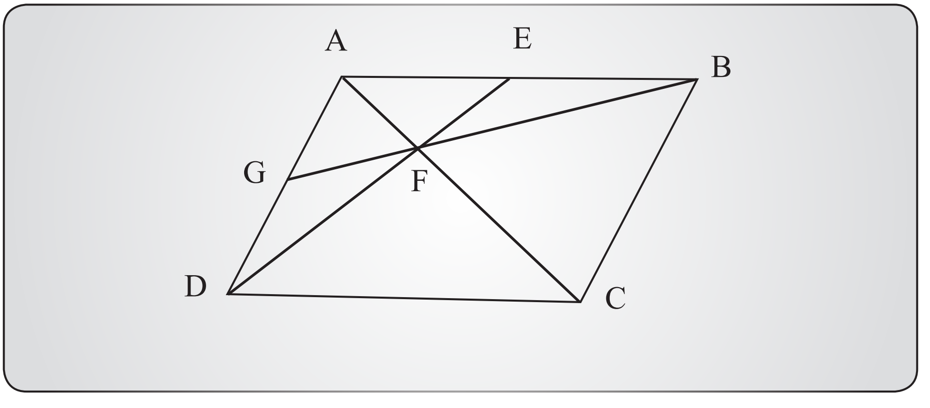
كتبت الطالبة:
نجد الارتفاع DO من المثلث DOB
$DO = X, DB = 2X, Do = ½ OB$ ويساوي نصف القطر
حسب النظرية التي تقول: إذا كان هناك ضلع قائم يساوي نصف الوتر فإن الزاوية المقابلة لهذا الضلع = 30^0.
نجد الارتفاع DO من المثلث DOB

الطالب بنت ارتفاعين داخليين من الرؤوس B و D. الطالبة تعرف النظرية المتعلقة بالمثلث القائم الزاوية ما يمكن أن يساعدها، ولكنها تريد تطبيقه على معطيات غير ملائمة؛ لذا هي تتعثر وتفشل في الإثبات.

من المعطيات بإمكاننا الاستنتاج بأنّه عندما لم يتمكّن الطلاب من بناء الارتفاع الخارجي في المعيّن (رسموا ارتفاعا داخليا أو لم يرسموا البتة) الذي هو ارتفاعا غير نموذجي، فإنّهم لم يستطيعوا بناء الإثبات الصحيح، ولجأوا إلى الاعتماد على فرضيات غير صحيحة أو قدّموا إجابات لا تمت بصلة لكي يبنوا إثباتهم. بينما الطلاب الذين نجحوا في بناء الارتفاع الخارجي للمعيّن عادة نجحوا في بناء إثبات صحيح للادعاء.

4.3 نتائج المهمة الثالثة

معطى متوازي الأضلاع ABCD



معطى أنّ $AG = 4$ و $GD = 3$, مساحة المثلث Δ AGF تساوي 5 سم مربع.

إذا كانت إجابتكم نعم، احسبوا مساحة المثلث واشرحوا خطوات الحل.

تحليل المهمة الثالثة

الحل في هذه المهمة يعتمد على مقدرة الطلاب على تمييز الارتفاع المشترك للمثلثين، بأن يشخّصوا انّ للمثلثين GFA و DFG ارتفاعا مشتركا (الارتفاع هو خارجي لأحد المثلثين وداخلي للمثلث الآخر). هنالك طريقتان لحل السؤال:

1. أن يُحسب طول الارتفاع المشترك حسب المثلث المعطاة مساحته وطول ضلعه، وبعدها أن تُحسب مساحة المثلث الآخر حسب القاعدة (معطاة) والارتفاع (الذي حسبناه).

2. لا حاجة لحساب الارتفاع المشترك لكي نحسب مساحة المثلث المطلوب، وإنّما الملاحظة بأن النسبة بين مساحتي المثلثين AGF و GDF هي مثل النسبة بين القطع AG و GD بالتلاؤم، لأنّ هنالك ارتفاعا مشتركا للمثلثين. لذا حسب التناسب الناتج نستطيع حساب مساحة المثلث الآخر متناسبا مع مساحة المثلث المعطاة.

سأعرض فيما يلي النتائج في جدولين، واحد يتعلق بالبند الأول في السؤال، هل من الممكن حساب مساحة المثلث؟ وإذا كانت الإجابة (لا) فما الّذي ينقصنا لكي نحسب المساحة؟ أمّا الجدول الثاني فيتعلق بالبند الثاني الذي فيه طُلب من الطلاب الذين أجابوا أنّه بإمكاننا حساب مساحة المثلث أن يحسبوا بالفعل هذه المساحة.

إجابات الطلاب للمهمة الثالثة

البند أ (انظر الجدول 3.): غالبيّة الطلاب (حوالي 57% من الطلاب) ادّعوا أنّه ليس بإمكاننا حساب مساحة المثلث الثاني. 44% من بينهم لم يميزوا الارتفاع المشترك وادعوا أنّه ينقص ارتفاع. مثلا طالبة كتبت: «لا، ليس بإمكاننا حساب مساحة المثلث GDF لأنه ليس معطى طول الارتفاع لكي نحسب المساحة». وأيضا 44% من بين الطلاب الذين ادعوا أنّه ليس بإمكاننا حساب مساحة المثلث الثاني علّلوا أنّه ينقصنا زاوية أو ضلع. مثلا تقول طالبة: « ليس بإمكاننا الحساب لأنّه تنقصنا معلومات مثل أضلاع أخرى أو زوايا أخرى التي بإمكاننا أن نستعملها لكي نحسب مساحة المثلث GFD». بإمكاننا الاستنتاج أنّ 57% من الطلاب الذين يدعون أنّه لا نستطيع حساب المثلث الثاني لا يلاحظون أو يميزون أيّة صلة بين المثلثين بشكل عام والارتفاع المشترك بشكل خاص.

بند أ:

جدول 3: هل بإمكاننا حساب مساحة المثلث؟ إذا كانت الإجابة (لا) فما الّذي ينقص؟

ماذا ينقص لكي نحسب / هل بإمكاننا الحساب	لا رد	هنالك ارتفاع مشترك	تنقص زاوية أو ضلع	ينقص شيء ليس محددا	ينقص ارتفاع	كلام لا يمت بصلة	**المجموع**
لا رد	19 (21%)	0	2 (2.1%)	1 (1.1%)	1 (1.1%)	1 (1.1%)	24 (26.5%)
بإمكاننا الحساب	5 (5.3%)	5 (5.3%)	0	1 (1.1%)	4 (4.3%)	0	15 (16.1%)
ليس بإمكاننا الحساب	0	0	23 (25.4%)	5 (5.3%)	23 (25.4%)	1 (1.1%)	52 (57.3%)
المجموع	24 (26.4%)	5 (5.3%)	25 (27.6%)	7 (7.5%)	28 (30.8%)	2 (2.1%)	91 (100%)

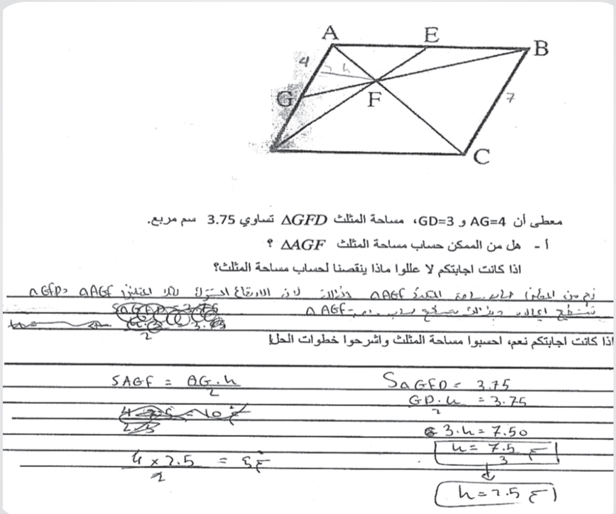
لقد تم إجراء اختبار كاي تربيع (chi square(10, N=91)=87.42, p=.000<0.01)، ولقد وجدت دلالة إحصائية بين تقييم إمكانية حساب المثلث وبين تمييز الكائن المشترك (الارتفاع المشترك) بين المثلثين. حوالي 27% من بين الطلاب لم يجيبوا على السؤال هل بإمكاننا حساب مساحة المثلث الثاني. فقط حوالي 16% ادعوا أنّه بإمكاننا حساب مساحة المثلث الثاني وثلثهم ادعى أنّه يوجد ارتفاع مشترك للمثلثين. مثلا يقول الطالب: «نعم بإمكاننا حساب مساحة المثلث، لأنّ الارتفاع المشترك للمثلين نستطيع إيجاده وبعدها نستطيع حساب مساحة المثلث الآخر».

جدول 4: طريقة الحساب

الحساب / هل بإمكاننا الحساب	لا يحسب	يبني ارتفاعا مشتركا وحسابه صحيح	يستعمل حساب المثلثات وحسابه صحيح	يبني ارتفاعا مشتركا وحسابه خطأ	يكتب حسابات خطأ	يحسب طول الارتفاع المشترك ولا يستعمله في المثلث منفرج الزاوية	**المجموع**
لا رد	10 (11%)	**10 (11%)	0	2 (2.1%)	1 (1.1%)	1 (1.1%)	24 (26.4%)
بإمكاننا الحساب	3 (3.2%)	11 (12%)	0	1 (1.1%)	0	0	15 (16.5%)
ليس بإمكاننا الحساب	50 (55%)	1 (1.1%)	1 (1.1%)	0	0	0	52 (57.2%)
المجموع	63 (69.2%)	22 (24.2%)	1 (1.1%)	3 (3.2%)	1 (1.1%)	1 (1.1%)	91 (100%)

** لا يردون على السؤال إذا كان بإمكاننا الحساب أم لا، ولكن يبنون ارتفاعا مشتركا ويحسبون بشكل صحيح.

البند ب (انظر جدول 4): في جدول 4 عرض لتكرارات الطلاب الذين يحسبون أو لا يحسبون (صحيح أم خطأ) مساحة المثلث GFD. لقد تم إجراء اختبار كاي تربيع ($chi\ square\ (10, N=91) = 52.42, p = .000 < 0.01$)، ووجدت دلالة إحصائية بين التقييم هل بإمكاننا الحساب وبين تمييز الارتفاع المشترك. فقط 25% من جميع الطلاب يستطيعون الحساب بشكل صحيح لمساحة المثلث المطلوب (22 طالبا بنوا ارتفاعا مشتركا وواحد استعمل حساب المثلثات)، وفقط نصف هؤلاء الطلاب كانوا متناسقين وذكروا أنّه بإمكاننا حساب مساحة المثلث. مثال لطالبة ادعت أنّه بإمكاننا الحساب، وكان حلّها:



الطالبة حلت:

$$S_{\Delta GFD} = 3.75$$

$$\frac{GD*h}{3} = 3.75$$

$$h*3 = 7.50$$

$$h = 2.5 \qquad h = \frac{7.50}{3}$$

$$S_{\Delta GFD} = \frac{AG*h}{2}$$

$$\frac{4*2.5}{2} = 5cm$$

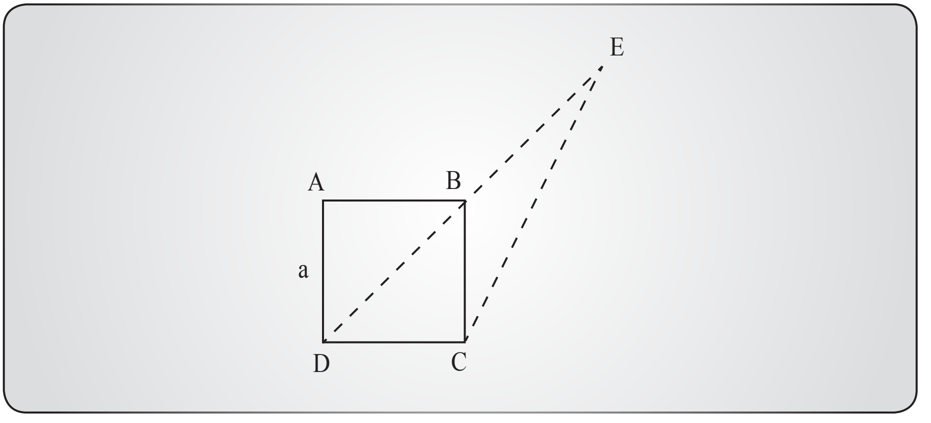
من اللافت للانتباه أنّ 10 طلاب يفضلون عدم الرد على السؤال هل بإمكاننا حساب مساحة المثلث، ولكنهم عرفوا كيف ينفذون الحسابات.

تقريبا 70% من الطلاب لم يقوموا بحساب مساحة المثلث، وغالبيّتهم (تقريبا 80% منهم) أخطأوا في البند الأول بأنّه ليس باستطاعتنا حساب مساحة المثلث المطلوب.

من المعطيات في الجدولين 3 و 4 من الممكن أن نلاحظ أنّ عدم قدرة الطلاب على تمييز وبناء الارتفاع المشترك للمثلثين كانت عاملا مؤثرا على عدم قدرتهم على حساب مساحة المثلث المطلوب.

4.4 نتائج المهمّة الرابعة

معطى المربع ABCD، النقطة E تقع على امتداد القطر BD بحيث يتحقّق BD=BE (انظر الرسم).



هل المثلثان Δ BCD, Δ CBE هما مثلثان متطابقان؟

تعليل: ____

____

____

هل يوجد للمثلثين Δ BDC, Δ CBE مساحتان متساويتان؟

تعليل: ____

____

____

تحليل المهمّة الرابعة

الهدف من هذه المهمة هو فحص هل الطلاب يشخّصون أنّ المثلثات هي متساوية المساحة بالرغم من أنّها غير متطابقة. الجدير بالذكر أنّه في جيل مبكّر (الصف الخامس) يتدرّب الطلاب على حساب مساحة المثلث ومساحات أشكال أخرى (انظر موقع مفتّش الرياضيات في وزارة المعارف).

بروساك ورفاقها (Prusak, Hershkowitz & Schwarz, 2013) بحثوا إجابات

طلاب الصف الثالث لمهمّة طُلِب فيها منهم تقسيم كعكة على شكل مربع من أربع قطع متساوية بأكثر طرق ممكنة. هذه المهمة ساعدت الطلاب على أن يفهموا أنّ أشكالا هندسية من الممكن أن تكون متساوية المساحة ولكنها غير متطابقة.

لحل هذا السؤال بإمكاننا التعليل بطريقتين:
الطريقة الأولى اعتبار المثلثين متساويي المساحة لأنّ الارتفاع من C إلى الأضلاع المتساوية (EB=BD) هو مشترك. الطريقة الثانية تعتمد على حساب المثلثات،

$S_{\Delta CBE} = ½BC *BD * Sin <DBC$ وأيضًا $S_{\Delta DBC} = ½BC * BE * Sin <CBE$

BE = BD الزوايا CBE, DBC هي زوايا متكاملة ويتحقق أن؛

$(Sin\ \alpha = Sin\ (180 - \alpha)$

إجابات الطلاب للمهمة الرابعة

جدول 5: هل المثلثات متساوية المساحة؟ من بين الطلاب الذين ادعوا أنّ المثلثين متطابقان

تعليل / هل المثلثات متساوية المساحة	لم يعلّل	هناك قاعدة متساوية وارتفاع مشترك	استعملَ حساب المثلثات وحدّد أنّ جبوب الزوايا متساوية	اعتمد على أنّ المثلثات متطابقة أو غير متطابقة	ادّعى أنّه توجد زاوية أو ضلع غير متساوٍ	لهما ارتفاع مختلف أو تنقص معطيات	المجموع
لم يرد	4 (18.2%)	0 (0%)					4 (18.2%)
المساحة متساوية	1 (4.5%)	2 (9.1%)	1 (4.5%)	7 (31.8%)	0 (0%)		11 (50%)
المساحة غير متساوية	4 (18.2%)			1 (4.5%)	1 (4.5%)	1 (4.5%)	7 (31.8%)
المجموع	9 (40.9%)	2 (9.1%)	1 (4.5%)	8 (36.4%)	1 (4.5%)	1 (4.5%)	22 (100%)

الطلاب الذين ذكروا في البند القائل أنّ المثلثين متطابقان ادّعوا أنّ المثلين متساويا المساحة أيضا. 64% من الطلاب الذين ادعوا في البند القائل أنّ المثلثين متطابقان وأيضا في بند (ب) ذكروا أنّهما متساويا المساحة عللوا ذلك بأنّ المثلثين متطابقان. 32% من بين الطلاب الذين ذكروا في بند (أ) أنّ المثلثين متطابقان ادّعوا في بند

(ب) انّ المثلثين ليسا متساويي المساحة. 57% من بين الطلاب الذين ادّعوا في بند (أ) القائل أنّ المثلثين متطابقان وبينما في بند (ب) ادّعوا أنّهما غير متساويا المساحة، لم يكتبوا تعليلا لادعائهم.

تقريبا 60% من بين الطلاب الذين حدّدوا في بند (أ) القائل أنّ المثلثين غير متطابقين (انظر جدول 6) ذكروا في بند (ب) القائل أنّ مساحتهما غير متساوية. 61% من بين الطلاب الذين ذكروا أنّ المثلثين ليسا متطابقين وأيضا غير متساويي المساحة، علّلوا إجابتهم بأنّه يوجد ضلع أو زاوية غير متساوية في المثلثين. مثلا تقول طالبة: «لا، بسبب أنّ المثلثين غير متطابقين». كما يبدو فإنّ الصورة الذهنية محدودة لأشكال مساحتها متساوية. هذه الصّورة الذهنية تضم فقط مثلثات متطابقة. ما يزيد بقليل عن ربع الطلاب الذين ذكروا أنّ المثلثات غير متطابقة وغير متساوية المساحة ادّعوا أنّهم بصدد ارتفاع مختلف أو نقص في المعطيات.

جدول 6: هل المثلثات متساوية المساحة؟ (من بين الطلاب الذين ادّعوا أنّ المثلثين غير متطابقين)

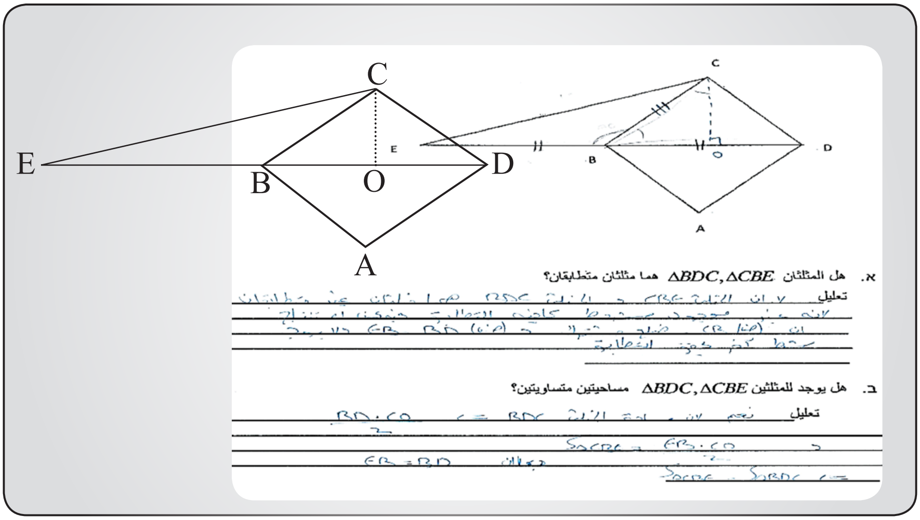
تعليل / هل المثلثات متساوية المساحة	لم يعلّل أو إجابه لا تمتّ بصلة	هناك قاعدة متساوية وارتفاع مشترك	استعملَ حساب المثلثات وحدّد أنّ جيوب الزوايا متساوية	اعتمد على أنّ المثلثات متطابقة أو غير متطابقة	ادّعى أنّه توجد زاوية أو ضلع غير متساوٍ	لهما ارتفاع مختلف أو تنقص معطيات	المجموع
لم يرد	5 (7.9%)	1** (1.6%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	6 (9.5%)
المساحة متساوية	2 (%3.2)	11 (17.5%)	5 (7.9%)	0 (0%)	1 (1.6%)	0 (0%)	19 (30.2%)
المساحة غير متساوية	4 (6.3%)	0 (0%)	0 (0%)	13 (%20.6)	11 (17.5%)	10 (15.9%)	38 (60.3%)
المجموع	11 (%17.5)	12 (19%)	5 (7.9%)	13 (%20.6)	12 (19%)	10 (15.9%)	63 (100%)

** بالرغم من أنّه علَّل أنّه يوجد قاعدة متساوية وارتفاع مشترك لم يجب على السؤال هل المساحتان متساويتان.

بند ب 2:

لقد تمّ إجراء اختبار كاي تربيع ($chi\ square(10, N=63)=70.38$, $p=.000<0.01$) لإجابات الطلاب الذين ادّعوا أنّ المثلثين غير متطابقين، ولقد وجدت دلالة إحصائية بين تقييم تساوي المساحات وبين تمييز الكائن المشترك (الارتفاع المشترك) بين المثلثين.

حوالي 30% من بين الطلاب الذين ذكروا في بند (أ) أنّ المثلثين غير متطابقين ذكروا في بند (ب) أنّ المثلثين متساويا المساحة. تقريبا 58% من بين هؤلاء الطلاب الذين ذكروا أنّ المثلثين غير متطابقين ولكن مساحتهما متساوية، علّلوا ذلك بأنّ للمثلثين ارتفاعا مشتركا وقاعدة متساوية. مثال: طالبة بنت ارتفاعا مشتركا، وكان حلّها:



بالنسبة للسؤال هل المثلثان CBE والمثلث BDC هما مثلثان متطابقان؟

كتبت الطالبة:

> تعليل: لا، ان المثلث CBE والمثلث BDC هما مثلثان غير متطابقين؛ لأنه لا تتوفر شروط كافية ... الخط غير واضح

بالنسبة للسؤال هل يوجد للمثلثين CBE والمثلث BDC مساحتين متساويتين؟

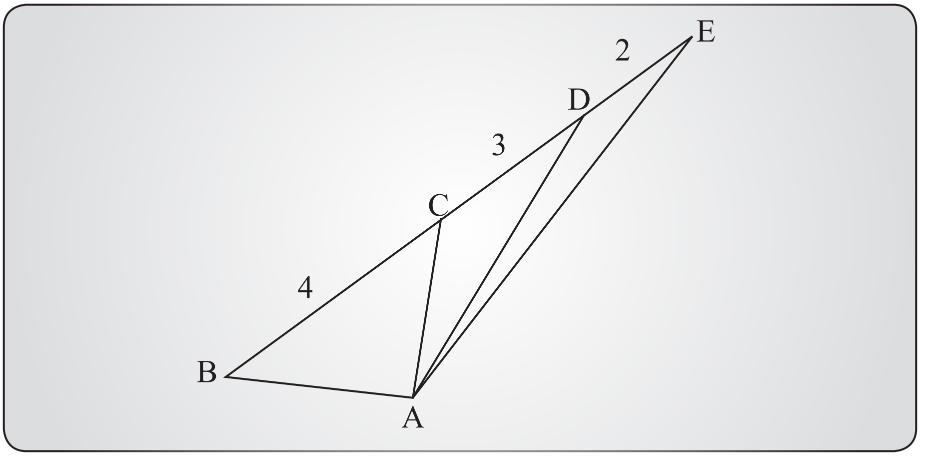
الطالبة كتبت: «صحيح أنّ مساحة المثلث BDC تساوي $\frac{BD * CO}{2}$ ، ومساحة المثلث CBE تساوي $\frac{EB * CO}{2}$ ، وبما أنّ BD = BE فيتحقق أنّ $S_{\Delta CBD} = S_{\Delta CBE}$»

حوالي 26% من بين الطلاب الذين ذكروا أنّ المثلثين غير متطابقين ولكن مساحتهما متساوية استعملوا حساب المثلثات في تعليلاتهم، ادّعوا أنّ $\sin\alpha=\sin(180-\alpha)$.

من الجداول 5 و 6 نلاحظ لنسبة ليست قليلة من الطلاب كانت صعوبة كبيرة أن تتقبّل أشكالا غير متطابقة كمتساوية المساحة. واعتمد الطلاب على معطيات غير ضرورية لحساب مساحة المثلثات (كل الأضلاع وكل الزوايا متساوية في المثلثين) بدلا من اعتمادهم على المعلومات الضرورية (الضلع والارتفاع المبنيّ عليه).

في المهمتين الثالثة والرابعة يعتمد الحل كثيرا على تمييز الارتفاع المشترك الذي كان خارجيّا لأحد المثلثين. في المقابلات، كانت الفرصة متاحة لأن أسأل ما لم يرِد في الاستمارة، فجاء هذا السؤال في المقابلة التي كانت عقب تمرير استمارة البحث (السؤال لم يظهر في استمارة البحث).

معطى المثلث ABE، القطع AC و AD تخرج من الرأس A إلى الضلع BE بحيث: $DE=2,\ CD=3,\ BC=4$، انظر الرسم:



1. احسب النسبة بين مساحتي المثلثين ADE و ACD.
2. احسب النسبة بين مساحتي المثلثين ADB و ABC.

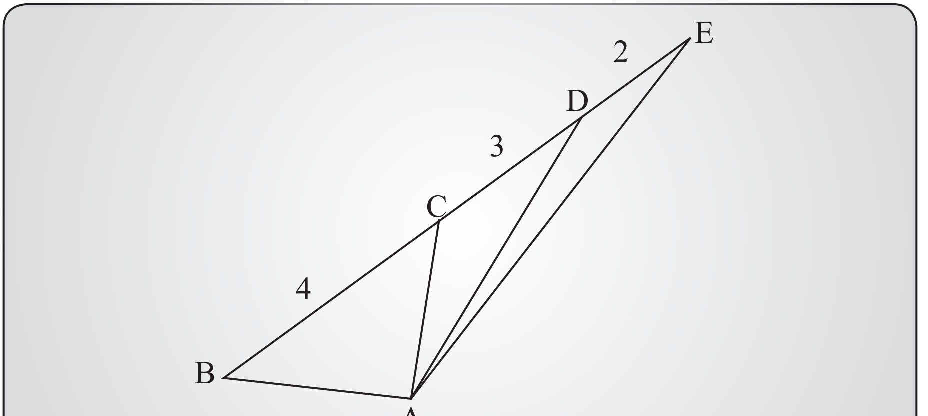
تحليل السؤال

هذا السؤال يبحث في قدرة الطالب على تمييز الارتفاع المشترك من الرأس A لكل المثلثات في الرسم المرفق. الارتفاع المشترك غير مرسوم وأيضا طوله غير معروف. بالرغم من أنّه ليس بإمكاننا حساب طول الارتفاع المشترك، إلّا أنّه يمكننا حساب

النسبة بين مساحات المثلثات. هذا الارتفاع داخلي للمثلثين اللذين طُلب من الطلاب حساب النسبة بين مساحتهما في بند (ب). في هذا السؤال بإمكاننا حساب النسبة بين مساحتي المثلثين عن طريق بناء الارتفاع المشترك (الارتفاع من الرأس A إلى امتداد الضلع CE هو أيضا ارتفاع لامتداد الضلع CD وهو خارجي للمثلثين ACD و ADE)، لذا النسبة بين مساحتي المثلثين هي 3:2.

في بند (ب) لكي نحسب النسبة بين مساحتي المثلثين ABC و ABD نمرِّر الارتفاع من الرأس A إلى الضلع BC. الارتفاع هو نفسه للضلع BD في المثلث ABD. وبسبب وجود ارتفاع مشترك للمثلثين، لذا فإنّ النسبة بين مساحتي المثلثين هي كالنسبة بين القطع BC و BD. لذا فالنسبة بين مساحتي المثلثين ABC و ABD هي 4:7.

فيما يلي المقابلة مع أسيل (اسم مستعار) فيما يتعلّق بهذا السؤال في المقابلة (أ- أسيل ب- باحث):



ب: لدينا عدد من المثلثات، هل تستطيعين حساب النسبة بين مساحتي المثلثين ABC و ABD؟

أ: النسبة؟

ب: نعم، النسبة بين مساحتي المثلثين.

أ: لا أذكر كيف نحسب النسبة.

ب: ماذا تعنين؟ ألم تذكري النسبة؟ لا يوجد هنا تشابه (مثلثات).

أ: .... 4:7 يمكن أن يكون.

ب: 4:7؟ كيف توصّلتِ إلى ذلك؟

أ: هذا 4 (القصد BC) و BD يساوي 7.

ب: ماذا بعد؟ كيف ولماذا استنتجت أنّه يساوي 4 مقسوم على 4؟

أ: لأنّ طول BC يساوي 4، وطول BD يساوي 7.

ب: ما الصلة؟ كيف نحسب المساحة؟

أ: طول ... مضروب ب-... الضلع مضروب بالارتفاع.

ب: أين الارتفاع؟

أ:.......

في هذا السؤال نلاحظ كيف تستطيع أسيل أن تحسب النسبة بين مساحتي المثلثين، لكنها لا تستطيع تعليل إجابتها. لا تميز أسيل الارتفاع المشترك للمثلثات الثلاثة وأيضا لمثلثين من بينهم وكذلك أيضا عندما يكون الارتفاع المشترك للمثلثين هو داخلي لكليهما (المثلثات ABC و ABD). هذا وعندما حاولتُ مساعدة أسيل للتوصّل إلى التعليل الصحيح بأنّه يوجد ارتفاع متساوي للمثلثين، فإنّ أسيل تواصل بعدم تمييز الارتفاع المشترك. فيما يلي مجتزأ من المقابلة التي فيها طُلب من أسيل حساب النسبة بين مساحتي المثلثين ACD و ADE.

ب: انظري إلى المثلثات ACD و ADE، ما هي النسبة بين مساحتيهما؟

أ : 3:2

ب: لماذا؟

أ: لا أعرف.

أيضا في الحالة التي فيها الارتفاع المشترك هو خارجي للمثلثين (ACD و ADE)، لا تعرف أسيل أن تعلل النسبة بين مساحتي المثلثين. بإمكاننا الاستنتاج من ذلك بأنّ أسيل لا تستطيع تمييز الارتفاع المشترك إذا كان هذا الارتفاع داخليا للمثلثين، خارجيا للمثلثين أو داخليا لأحدهما وخارجيا للمثلث الآخر. من هنا نستطيع أن نقول أنّه في السؤال السابق مصدر الصعوبة هو عدم رؤية الارتفاع المشترك

للمثلثين. في الواقع وبالرغم من هذه الصعوبة إلّا أنّ أسيل تعرف أنّ النسبة بين مساحات المثلثات التي لها رأس مشترك والتي أضلاعها المقابلة لهذا الرأس موجودة على نفس المستقيم – تتعلق بأطوال أضلاعها التي تكون بمثابة قاعدة في حساب المساحة! هذه المعرفة هي معرفة بدائية فقط حتّى الآن. أسيل لا تعي أنّه إذا كان للمثلثين ارتفاع مشترك فعندها تكون النسبة بين مساحتي المثلثين تساوي النسبة بين الأضلاع المقابلة للرأس المشترك.

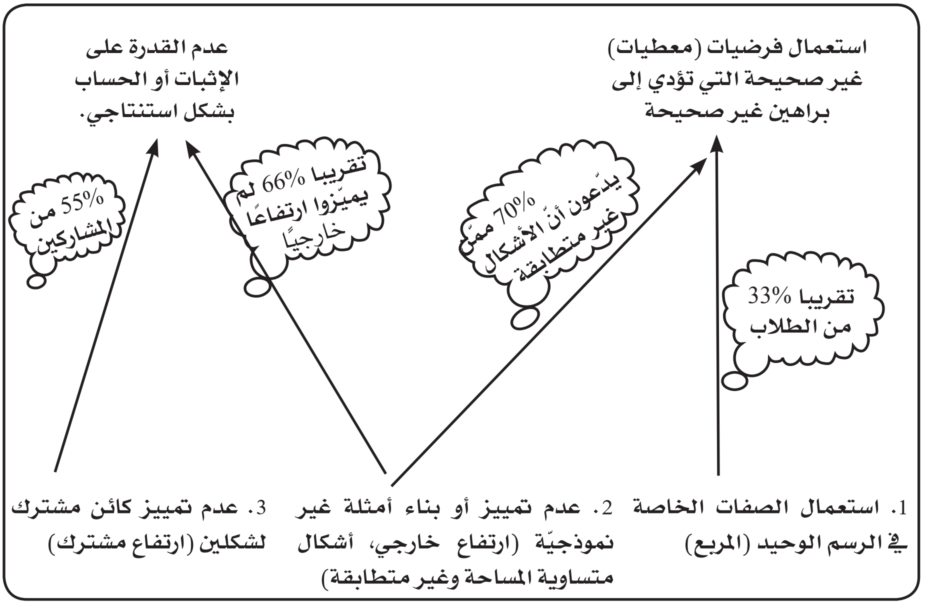
5. تلخيص، نقاش وتوصيات

في هذا البحث أردت فحص فيما إذا كان هنالك تأثير للمؤثرات البصرية المتعلقة ببناء وفهم المصطلحات الهندسية على فهم الطلاب للبراهين وقدرتهم على بنائها.

بعد تحليل النتائج من الاستمارة رأينا جليا تأثير ثلاث ظواهر رئيسية من الصعوبات البصرية لبناء المصطلحات الهندسية على عملية بناء وفهم البرهان (انظر الرسم التوضيحي 1. يصف بشكل كامل ومرئي ويربط جميع النتائج التي انبثقت عن الاستمارة والمقابلات)، وهذه الظواهر هي:

1. ظاهرة الرسمة الوحيدة التي تعبِّر عن المصطلح ككل بالنسبة للطالب، بالرغم من أنّها مثال مّا لا نهاية من الأمثلة.
2. عدم القدرة على تمييز أو بناء أمثله غير نموذجية للمصطلح.
3. عدم القدرة على تمييز وتقبُّل كائن مشترك كزاوية مشتركة، ضلع مشترك أو ارتفاع مشترك لشكلين هندسيين في نفس الوقت.

يُظهر هذا البحث الحقيقة التي ربطت المستويات المختلفة للزوج فان هيلي (van Hiele & van Hiele, 1958) ولم تبقَ هذه المستويات معزولة الواحدة عن الأخرى. أظهر البحث أنّ العوامل البصرية المرتبطة ببناء المصطلحات الهندسية والتي تظهر جليا في أول ثلاثة مستويات من مستويات فان هيلي تلقي بظلالها أيضا على المستوى الرابع الذي فيه يطلب من الطالب أو المتعلم أن يبني ويقيم البرهان الهندسي. أبحاث سابقة تحدّثت عن صعوبات جمة في عمليات بناء البرهان الهندسي (Mariotti, 2006; Senk, 1985)، والبحث الحالي استحضر بعض العوامل التي لم تذكر في تلك الأبحاث والتي رأيت أنّها كانت مانعة لعمليات بناء البراهين وتقييمها.



رسم توضيحي 1: النتائج الرئيسيّة للبحث

ركّزت في هذا البحث على فحص تأثير ثلاث ظواهر على بناء البراهين والأدلة. تأثير الرسمة الواحدة على عملية بناء البرهان فُحصت بواسطة مهمّة إثبات فيها يجب التطرق إلى شكل رباعي عام، ولكن الرسمة الظاهرة بجانب هذه المهمة كانت لمربع. لم يع الطلاب الأخذ بالصفات ذات الصلة والضرورية وترك الصفات التي لا تمت بصلةَ للمهمة وغير ضرورية للبرهان (Gal & Linchevski, 2010). وُجد أنّه تقريبا ثلث الطلاب صادقوا على برهان اعتمد على الصفات الخاصة «بالرسمة الواحدة» التي رسمت بجانب مهمة البرهان بدلا من الاعتماد على الصفات الضرورية للمصطلح في المهمة والمتوفرة في كل أمثلة المصطلح وليس فقط في المربع. الاعتماد على الصفات الخاصة للرسمة الواحدة أدى إلى افتراض فرضيات غير صحيحة؛ مما حدا بثلث الطلاب أن يستنتجوا استنتاجا خاطئا. هذه النتيجة تؤكد نتائج يروشالمي ونفتالييف (Yerushalmy & Naftaliev, 2011) المتعلقة بالاستعمال الساذج للطلاب للرسومات أثناء عملية البرهنة عندما تكون الرسمات معطاة بشكل ثابت كما هي في الكتب. هذا التصرف بالرسومات هو تصرف ساذج كما عرّفه دوبل (Duval, 1999). استعمال برامج الهندسة الديناميكية كالجيوجبرا بإمكانها أن تساعدنا في الفصل بين الصفات للمثال المعروض الذي يكون عادة نموذجيا وبين الصفات الضرورية للشكل في مهمة البرهان. بواسطة جر الشكل نحصل على أمثلة

مختلفة لنفس المصطلح؛ ولذا لا تتغير الصفات الضرورية لنفس المصطلح من رسمة إلى أخرى (Maymon-Erez & Yerushalmy, 2007). هذه النتائج تتوافق مع ادّعاء فيشياين (Fischbein, 1993) بأنّ العوامل البصرية وعمليات البرهنة والإثبات متعلقة الواحدة بالأخرى. الصور الذهنية غير الكاملة للمصطلحات بإمكانها أن تؤدي إلى افتراضات غير صحيحة، وبالتالي إلى بناء براهين غير صحيحة.

لقد فحصت تأثير تمييز وبناء أمثلة غير نموذجية لمصطلحات هندسية على عمليات البرهان بطريقتين. الأولى بواسطة مهمة في الاستمارة فيها الحاجة إلى بناء ارتفاع خارجي للمعيّن لإثبات ادعاء معيّن. والثانية كانت في الاستمارة وأيضا في المقابلات عندما طُلب من الطلاب إثبات أنّ المساحات متساوية لأشكال غير متطابقة. أظهرت نتائج الاستمارة أنّ صعوبة بناء الأمثلة غير النموذجية لمصطلح الارتفاع في المعيّن أدى الى عدم القدرة على البدء ببناء البرهان. حوالي ثلثي الطلاب لم ينجحوا في بناء البرهان بسبب أنّهم لم ينجحوا في بناء الارتفاع الخارجي للمعيّن. مقارنة بهؤلاء، فإنّ الطلاب الذين نجحوا في بناء الارتفاع الخارجي كتبوا أيضا برهانا صحيحا. أوفيريا بيفت (Ouvrier-Buffet, 2006) أشار بشكل واضح إلى فروقات بين بناء المصطلح وبين بناء تعريف نفس المصطلح. من نتائج هذا البحث نستطيع أن نتبيّن بشكل واضح أنّ هذه الفروقات تلقي بظلالها على عمليات بناء البراهين. الصورة الذهنية غير الكاملة لمصطلح الارتفاع في المعيّن كانت العامل المؤثر على عمليات بناء البرهان.

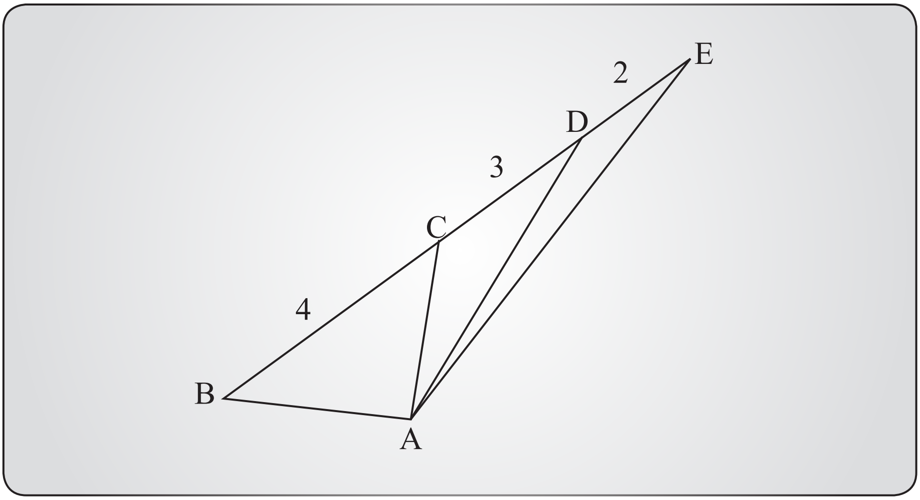
الطريقة الثانية التي فيها فحصت تأثير تمييز وبناء أمثلة غير نموذجية على عمليات البرهان الهندسي كانت بواسطة المهمة التي فيها يُطلب إثبات شكلين متساويي المساحة رغم أنّهما غير متطابقين. وجدت أنّه أكثر من نصف الطلاب الّذين أقروا بأنّ المثلثين غير متطابقين لم يلاحظوا أنّهما متساويا المساحة. تقريبا 85% من الطلاب الذين أقروا بأنّ المثلثين غير متطابقين ومتساويا المساحة، علّلوا ذلك بأنّ القاعدة والارتفاع في المثلين متساويان أو إنّهم استعملوا حساب المثلثات. الغالبيّة من بين الطلاب الذين استعملوا صفات غير ضرورية للمصطلح مساحة، سواء أكانوا ممّن ادعوا بشكل صريح بأنّ المثلثات غير متطابقة أم ممّن ادعوا أنّه توجد زوايا أو أضلاع غير متساوية في المثلثين، استنتجوا أنّ المثلثات غير متساوية المساحة.

بإمكاننا التلخيص والقول إنّه عندما تكون الصورة الذهنية للمصطلح غير دقيقة وتحوي فقط أمثلة نموذجية، فإنّ ذلك يؤدي إلى إخفاق كبير في عمليات الإثبات والبرهنة المتعلقة بالمصطلح نفسه. من الممكن أن يكون ذلك بعدم القدرة على البدء في عملية البرهنة (عدم القدرة على بناء الارتفاع الخارجي) أو افتراض فرضيات

غير صحيحة ومن ثمّ استنتاج استنتاجات غير صحيحة. هذه النتيجة تتوافق مع نتائج أبحاث سابقة في مواضيع غير هندسية التي وجدت أنّ الاعتماد على الصورة الذهنية النموذجية عوضا عن الصفات الضرورية في تعريف للمصطلح تؤدي إلى إخفاقات كثيرة في حلول الطلاب لمهامّ رياضية (Edwards & Ward, 2004; Presmeg, 1992).

تطرق فيشباين (Fischbein, 1994) إلى التناقضات بين الصفات البصرية والصفات النظرية للأشكال الهندسية وتأثيرها على عملية البرهنة، ولكنه لم يبحث ذلك. هذا البحث يضع هذه القضية تحت الأضواء. فنرى الحاجة إلى استعمال برامج الهندسة الديناميكية مثل الجيوجبرا. عقب عملية جرّ الرسم فإنّه يتغير، وبناء على ذلك تتغير الصفات الخاصة لكل شكل ولكن الصفات الضرورية تبقى ثابتة ولا تتغير. هذا البرنامج بإمكانه بناء صورة ذهنية دقيقة أكثر للمصطلحات الهندسية وهو الذي لا يعتمد على المثال النموذجي. صورة ذهنية كهذه تكون وافرة بأمثلة كثيرة، وبالتالي تحدّ من الوقوع في الأخطاء في بناء البراهين (Yerushalmy, 1991; Laborde, 1995).

لقد فحصت تأثير تمييز كائن هندسي مشترك (الارتفاع المشترك) لشكلين هندسيين على عمليات البرهنة بواسطة مهمتين في الاستمارة وأيضا من خلال المقابلات التي جاءت عقب توزيع الاستمارة. في المهمتين في الاستمارة كان على الطالب حساب مساحة المثلث عن طريق تمييز الارتفاع المشترك للمثلثين، وقد كان هذا الارتفاع خارجيا لأحد المثلثين. في المقابلة التي أعقبت توزيع الاستمارة كانت هناك حاجة لحساب النسبة بين مساحتي مثلثين لهما ارتفاع مشترك داخلي فيهما. نتائج الاستمارة أظهرت أنّه أقلّ من ربع الطلاب نجحوا في تمييز الارتفاع المشترك للمثلثين عندما كان هذا الارتفاع خارجيا لأحد المثلثين وبواسطته يكون حساب مساحة المثلث الأول وبإمكاننا حساب مساحة المثلث الآخر. عدم تمييز الارتفاع المشترك أدى إلى عرقلة في عملية البرهنة لدى الطلاب. الغالبية العظمى من الطلاب علّلوا ذلك بأنّه تنقص معلومات في المهمة؛ ولذلك ليس بإمكاننا حساب مساحة المثلث المطلوب. وأيضا في المقابلات، فالغالبية العظمى واجه صعوبة في تمييز الارتفاع المشترك حتى ولو كان داخليا في المثلثين (انظر الرسم الارتفاع المشترك للمثلثات ABD و ABC). عرف الطلابُ النسبةَ بين مساحتي المثلثين لكنّهم لم يستطيعوا تعليل ذلك بواسطة ارتفاع المشترك للمثلثين.



من النتائج نستطيع أن نلاحظ أنّ الظواهر الثلاث تؤثّر على عمليات البرهنة ليس بنفس المدى: تأثير ظاهرة المثال النموذجي وأيضا عدم رؤية الكائن الهندسي المشترك لشكلين هندسيين أكبر بكثير من تأثير الرسمة المرفقة بمهمة البرهان لدى الطلاب. عدم القدرة على تمييز وبناء المثال غير النموذجي للمصطلح ارتفاع حدَّت من قدرة الطلاب على عملية البرهنة، وأيضا عدم القدرة على تمييز الكائن المشترك كالارتفاع المشترك للمثلثين إن كان نموذجيا أم غير نموذجي منعت أيضا الطلاب من بناء الخطوات اللازمة لحساب مساحة أحد المثلثات بالاعتماد على مساحة المثلث الآخر وعن طريق النسبة بين مساحتي المثلثين، وأيضا لإثبات وتعليل تساوي مساحات بالرغم من أن المثلثات غير متطابقة. ولقد أظهرت النتائج أنّه هناك دلالة إحصائية ($p<0.01$) بين تلك الظواهر وبين عملية بناء البرهان وتقييمه.

توصياتي بالنسبة لتعليم الهندسة هي في مجالين أساسيين متعلقين الواحد بالآخر: تأهيل المعلمين وبرامج التعليم.

في مجال تأهيل المعلمين من المفضل أن يكشف المعلمون أثناء الخدمة والمعلمون قبل الخدمة عن الصعوبات التي واجهها الطلاب أثناء بناء البراهين وتقييمها والتي ظهرت جليا في البحث: استعمال الصفات الخاصة في الرسمة الوحيدة، عدم تمييز أو بناء أمثلة غير نموذجية وعدم تمييز كائن مشترك لشكلين. الفائدة من كشف هذه الصعوبات هي بناء الوعي والإدراك للأسباب التي تؤدي إلى هذه الصعوبات، ومن هنا خلق الاستعداد لمعالجة هذه الصعوبات أثناء العملية التعليمية.

أمّا في مجال برامج التعليم فمن المستحسن أن تعالج برامج التعليم الصعوبات والمشاكل

التي واجهها الطلاب والتي ظهرت في البحث الحالي. أكَّدت نتائج البحث الحالي على القصور الناتج من استعمال الوسائل التقليدية، والتي تعتمد على الرسومات الثابتة في فهم المصطلحات، وهذه كلّها تؤثّر على عملية البرهان أيضا، لذا على برامج التعليم أن تأخذ بالأسباب وتحثّ على استعمال الوسائل التعليمية المختلفة كاستعمال الوسائل التكنولوجية التي تشمل تطبيقات الهندسة الديناميكية وذلك من أجل الحدّ من التصرفات الساذجة لدى الطلاب بالاعتماد على صفات الرسمة بدلا من صفات المصطلح، وكذلك من أجل إثراء الصورة الذهنية للمصطلحات الهندسية الّتي بدورها من شأنها أن تقلل من حدة الصعوبات في بناء البراهين وتقييمها.

المراجع

הדס, נ. (2001). הוכחה כהסבר וכאמצעי שכנוע בפעילות בסביבה של גיאומטריה דינמית. חיבור לשם קבלת דוקטור לפילוסופיה, האוניברסיטה העברית.

הרשקוביץ, ר. (1989). דימויי מושגים הנדסיים בסיסיים אצל תלמידים ומורים. חיבור לשם קבלת תואר דוקטור לפילוסופיה, האוניברסיטה העברית.

Balacheff, N. (1991). The benefits of limits of social interaction: the case of mathematical proof. In A. J. Bishop, S. Mellin-Olsen & J. Van Dormolen (Eds.), Mathematical knowledge: its growth through teaching (pp. 175-192). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Battista, M. T. (2007). The development of geometric and spatial thinking, in: F. Lester (Ed) Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. Charlotte, NC: NCTM/Information Age Publishing.

Bills, L., Dreyfus, T., Mason, J., Tsamir, P., Watson, A., & Zaslavsky, O. (2006). Exemplification in mathematics education. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká & N. Stehlíková (Eds.), Proceedings of the Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 1 (pp. 126-154). Prague, Czech Republic: PME.

Chen, C.-L., & Herbst, P. (2013). The interplay among gestures, discourse, and diagrams in students' geometrical reasoning. Educational Studies in Mathematics, 83(2), 285–307.

Crowley, M. L. (1987). The van Hiele model of the development of geometric thought. Learning and teaching geometry, K-12, 1-16.

Dvora, T., & Dreyfus, T. (2014). Unjustified assumptions in geometry made by high school students. Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, Duval, R. (1998). Geometry from cognitive point of view. In C. Mammana & V. Villani (Eds.), Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century (pp. 37-51). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.13, 29-55.

Edwards, B. S., & Ward, M. B. (2004). Surprises from mathematics education research: Student (mis) use of mathematical definitions. The American Mathematical Monthly, 111(5), 411-424.

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. Educational Studies in Mathematics, 24, 139-162.

Fischbein, E. (1994). The interaction between the formal, the algorithmic, and the intuitive components in a mathematical activity. In R. Biehler, R. W. Scholz, R. Strässer & B. Winkelmann (Eds.), Didactics of mathematics as a scientific discipline (pp. 231-245). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Fujita, T., & Jones, K. (2007). Learners' understanding of the definitions and hierarchical classification of quadrilaterals: towards a theoretical framing. Research in Mathematics Education, 9(1-2), 3-20.

Freudenthal, H. (1973). Mathematics as an educational task. Dordrecht: Reidel Publishing Company.

Gal, H., & Linchevski, L. (2010). To see or not to see: analyzing difficulties in geometry from the perspective of visual perception. Educational Studies in Mathematics, 74(2), 163–183.

Haj-Yahya, A., Hershkowitz, R., & Dreyfus, T. (2016). Impacts of students' difficulties in constructing geometric concepts on their proof's understanding and proving processes. In Csíkos, C., Rausch, A., & Szitányi, J. (Eds.). Proceedings of the 40th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 2, pp. 345–352. Szeged, Hungary: PME.

Hersh, R. (2009). What I would like my students to already know about proof. In D. A. Stylianou, M. L. Blanton & E. J. Knuth (Eds.), Teaching and learning proof across the grades: A K-16 perspective (pp. 17-20). New York, NY: Routledge.

Hershkowitz, R. (1990). Psychological aspects of learning geometry. In P. Nesher & J. Kilpatrick (Eds.), Mathematics and cognition (pp. 70–95). Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Hershkowitz, R., Parzysz, B., & van Dormolen, J. (1996). Space and shape. In A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick & C. Laborde (Eds.), International handbook of mathematics education (pp. 161-204). Dordrecht: Kluwer.

Laborde, C. (1995). Designing tasks for learning geometry in a computer based environment. In L. Burton & B. Jaworski (Eds.), Technology in mathematics teaching – a bridge between teaching and learning (pp. 35–68). London: Chartwell-Bratt.

Laborde, C. (2005). The hidden role of the diagrams in students' construction of meaning in geometry. In J. Kilpatrick, C. Hoyles & O. Skovsmose (Eds.), Meaning in mathematics education (pp. 159-179). New York, NY: Springer.

Maymon-Erez, M. & Yerushalmy, M. (2007). "If you can turn a rectangle to a square then you can turn a square to a rectangle…": On the complexity and importance of psychologizing the dragging tool by young students. International Journal .of Computers for Mathematical Learning, 11(3), 271-299

Jones, K. (1997). Student teachers' conceptions of mathematical proof. Mathematics Education Review, 9, 21-32.

Jones, K. (2000). Providing a foundation for deductive reasoning: students' interpretations when using dynamic geometry software and their evolving mathematical explanations. Educational Studies in Mathematics, 44(1-2), 55–85.

Mariotti, M. A. (2007). Proof and proving in mathematics education. In A. Guitierrez & P. Boero (Eds.) Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education, Rotterdam: Sense Publishers.

Mariotti, M. A. (2006). Proof and proving in mathematics education. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future (pp. 173-204). Rotterdam: Sense.

Okazaki, M., & Fujita, T. (2007). Prototype phenomena and common cognitive paths in the understanding of the inclusion relations between quadrilaterals in Japan and Scotland. In J. H. Woo, H. C. Lew, K. S. Park & D. Y. Seo (Eds.), Proceedings of the Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 4 (pp. 8-41). Seoul, South Korea: PME.

Ouvrier-Buffet, C. (2006). Exploring mathematical definition construction processes. Educational Studies in Mathematics, 63, 259-282.

Parzysz, B. (1988). Knowing vs. seeing, problems of the plane representation of space geometry figures. Educational Studies in Mathematics, 19(1), 79–92.

Presmeg, N. C. (1992). Prototypes, metaphors, metonymies and imaginative rationality in high school mathematics. Educational Studies in Mathematics, 23, 595–610.

Pickreign, J. (2007). Rectangles and rhombi: how well do pre-service teachers know them? Issues in the Undergraduate Mathematics Preparation of School Teachers, 1, 1-7.

Senk, S. L. (1985). How well do students write geometry proofs? Mathematics Teacher, 78(6), 448-456.

Steenpass, A., & Steinbring, H. (2014). Young students' subjective interpretations of mathematical diagrams—elements of the theoretical construct "frame-based interpreting competence.'' ZDM—The International Journal on Mathematics Education14–3 ,(1)46 ,.

Strauss, A., & Corbin, J. (1994). Grounded theory methodology. Handbook of Qualitative Research, 17, 273-285.

The Arabic Academic Institute For Education
The Academic College Beit Berl

Al-Hasad

A Journal for the Study of Language Education and Arab Society in Israel

Vol. 9/2019

המכללה האקדמית בית ברל
الكلية الأكاديميّة بيت بيرل
Beit Berl College

הפקולטה לחינוך
המכון האקדמי הערבי לחינוך
المعهد الأكاديمي العربي للتربية